ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 24, n. 1-2, 2016

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1-2 - Giugno-Dicembre 2016

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

Associazione
"Incontri con la matematica"

NRD
(Nucleo di Ricerca
in Didattica della Matematica)

La matematica
e la sua didattica

Anno 24, n. 1-2, 2016

Rivista di ricerca in didattica
della matematica fondata nel 1987

ISSN 1120-9968 - Periodico semestrale - n. 1-2 - Giugno-Dicembre 2016

In copertina:
Logo dell'Università di Bologna, concesso alla rivista *La matematica e la sua didattica* nell'anno 2000 (anno 14° dalla fondazione della rivista).
Logo del NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica) fondato nel 1984, attivo presso il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna.
Logo dell'Associazione "Incontri con la matematica" fondata nel 2010 con sede in Bologna.

Gli Autori sono tenuti a inviare articoli già redatti secondo le regole della rivista, pena la non accettazione dell'articolo. Le norme redazionali si trovano su:

http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.net
http://www.incontriconlamatematica.org

Redazione: prof.ssa Silvia Sbaragli (silvia.sbaragli@supsi.ch)
Ricezione articoli: prof.ssa Maura Iori (maura@iori-maura.191.it)

Direttore responsabile: Bruno D'Amore
Proprietà Direzione Amministrazione Redazione, presso Associazione Incontri con la Matematica

Periodico semestrale, autorizzazione del Tribunale di Bologna n. 6219 del 13/09/1993.

ISSN 1120-9968

La rivista *La matematica e la sua didattica* è open access, si scarica gratuitamente dai seguenti siti:
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net

La matematica e la sua didattica

NRD Università di Bologna, Italia e Associazione Incontri con la Matematica, Bologna, Italia.

Indice

La nuova vita della rivista "La matematica e la sua didattica". Editoriale anno 24, n. 1-2, novembre 2016

Bruno D'Amore

Nel settembre del 1986 si svolse a Bologna il Convegno Nazionale *Incontri con la matematica* numero 0 sul tema *Gioco e matematica*. La casa editrice di Bologna Licinio Cappelli produsse un testo di Atti piuttosto corposo ed elegante (D'Amore, 1986). Fra altri relatori, parteciparono: Gianfranco Arrigo, Ferdinando Arzarello, Adriano Barlotti, Mario Barra, Michele Emmer, Tito Pellegrino, Ennio Peres, Francesco Speranza, Dario Uri.
Visto l'enorme successo, decisi lì per lì due cose:

a) avrei proseguito il convegno, ma non a Bologna, dove l'amministrazione comunale non aveva mostrato particolare interesse; e infatti dal 1987 il convegno si svolge ininterrottamente a Castel San Pietro, città termale fra dolci colline, a pochi chilometri da Bologna; nel 1987 si tenne il convegno numero 1 e nel novembre 2016 si svolge il convegno numero 30; decisi di dare al convegno *Incontri con la matematica* numero 1 del 1987 il titolo: *La matematica e la sua didattica*;

b) avrei fondato una rivista che sarebbe nata nello stesso 1987 con il titolo *La matematica e la sua didattica*.

Atti del convegno numero 1 e rivista vennero realizzati dalla casa editrice Armando Armando di Roma; questa collaborazione durò per alcuni anni (dal 1987 al 1992) e poi, dal 1993, entrambi i volumi passarono nelle mani della casa editrice Pitagora di Bologna.
Il convegno proseguì senza intoppi, producendo sempre a tempo gli Atti, pronti in sala il giorno stesso dell'inaugurazione; né mai ci fu nemmeno solo un mese di ritardo nell'uscita dei tanti numeri della rivista.
Nel primo numero della rivista vennero pubblicati i seguenti articoli:
Bruno D'Amore e Francesco Speranza: *Editoriale di presentazione della rivista*.
Douglas Hofstadter: *Ricerche sulle analogie fluide*.
Francesco Speranza: *A che cosa serve la Filosofia della Matematica?*
Gianfranco Arrigo: *Un'esperienza di "Mastery Learning" nella scuola elementare*.
Salvatore Coen: *Qualche spunto di Didattica matematica nelle secondarie superiori*.
Piero Plazzi: *Equazioni differenziali non lineari*.
Renzo Vitali: *Lo zero presso i Greci*.
Nicolò Pintacuda: *Ottimizzazione e Probabilità*.
Schede bibliografiche (a cura di Bruno D'Amore).
Il piano di convegno e rivista fu studiato a lungo a tavolino con il maestro,

collega ed amico Francesco Speranza e so di poter affermare che lo spirito delle iniziative prosegua tuttora immutato: far conoscere agli insegnanti interessanti temi di matematica e di didattica della matematica, questi ultimi anche su risultati della ricerca.
La rivista ebbe cadenza il primo anno annuale, dal secondo anno semestrale e poi trimestrale; l'alto numero di abbonati costituì la sua fortuna editoriale. In questa avventura fui accompagnato con passione e maestria della mia allieva Silvia Sbaragli, ora docente in Svizzera.
Ma poi, nel 2009, varie vicende personali (l'andata in pensione anticipata, la decisione di vivere la maggior parte della mia vita all'estero) e relazionali (la sconvolgente morte improvvisa di un caro allievo) mi fecero decidere di abbandonare l'impresa; nell'ultimo numero della rivista (anno 23, numero 4) apparve quanto segue:

1. Bruno D'Amore: *In ricordo di Giorgio Tomaso Bagni*.
2. Bruno D'Amore: *Editoriale*.
3. Indice completo della rivista *La matematica e la sua didattica* nei suoi 23 anni di vita.

Questo indice, curato da Anna Borrelli e Tito Pellegrino è da me considerato un regalo di alto valore.
(Per una storia del convegno si veda D'Amore, Fandiño Pinilla e Sbaragli, 2012; per una storia della rivista si veda D'Amore, 2009; entrambi si posso rintracciare nel sito: http://www.dm.unibo.it/rsddm).
La Rivista in realtà non è mai stata chiusa del tutto; il titolo è rimasto depositato presso il tribunale di Bologna e mai ritirato; il numero ISSN (*International Standard Serial Number*) non è mai stato dichiarato decaduto. E così oggi si prospetta la possibilità di rinascere, come una stupenda fenice che torna a nuova vita dalle sue stesse ceneri: il titolo, lo stesso; ISSN, uguale; proprietario, non più l'editore Pitagora ma un'associazione di Bologna (*Incontri con la matematica*), la stessa che gestisce la logistica del nostro Convegno annuale di novembre; i collaboratori, capitanati da Silvia Sbaragli, sono tanti, godono della mia stima e della mia più ampia fiducia, e costituiscono il Comitato di Redazione (si vedano le pagine precedenti); tanti amici e colleghi entusiasti nell'accettare di far parte del Comitato Scientifico (idem); una marea di nomi illustri a disposizione come referee segreti (non si veda né prima né oltre, essendo un elenco segreto …); la scadenza per ora semestrale e poi vedremo.
Grandi novità: la rivista è gratuita, scaricabile dai nostri siti (si vedano le pagine precedenti) ed è solo on line, open access. Non è più di carta, non vale più la pena, la spesa sarebbe eccessiva.

E così, in questo anno 2016, nel quale celebriamo con tante novità il convegno numero 30, rinasce anche la nostra Rivista, dopo 6 anni di silenzio, con ambizioni forti e tanta speranza di dare una mano alla ricerca in didattica della

matematica e alla divulgazione sia della matematica che della didattica della matematica.
Verranno pubblicati articoli in italiano, spagnolo e inglese, la selezione avverrà su autoproposta degli autori ma dopo attenta valutazione critica anonima da parte di due o tre referee, insomma con tutti i criteri di serietà che una rivista seria richiede.

Grazie ai membri del Comitato di Redazione, tutte persone serie, esperte e capaci, nelle quali ripongo la più totale fiducia; e grazie ai membri del Comitato Scientifico, tutti cari amici, tutte persone di alto livello scientifico, allineate (pur nelle ovvie differenze) sulla direzione scientifica che voglio dare a questa rivista.

Il mio/nostro sogno è di ri-creare qualcosa che possa essere d'aiuto alla ricerca e alla scuola militante, per una matematica sempre più amata, viva, conosciuta, apprezzata.

Riferimenti

D'Amore, B. (Ed.) (1986). *Gioco e matematica*. Atti del Convegno Nazionale *Incontri con la matematica*, n° 0, settembre 1986, Bologna. Bologna: Cappelli.

D'Amore, B. (2009). Editoriale. *La matematica e la sua didattica*, *23*(4), 391–394.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2012). *Origini, storia, modalità e scopi del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica*. www.incontriconlamatematica.net

La nueva vida de la revista "La matematica e la sua didattica". Editorial año 24, n. 1-2, noviembre 2016.

Bruno D'Amore

En septiembre de 1986 se realizó en Bologna el Congreso Nacional *Incontri con la matematica* número 0 cuyo tema fue *Gioco e matematica* (*Juego y matemática*). La editorial de Bologna Licino Cappelli publicó para la ocasión un texto elegante y considerable de las Actas (D'Amore, 1986). Entre otros relatores, participaron: Gianfranco Arrigo, Ferdinando Arzarello, Adriano Barlotti, Mario Barra, Michele Emmer, Tito Pellegrino, Ennio Peres, Francesco Speranza, Dario Uri.
Visto el gran éxito, decidí en ese momento dos cosas:

a) continuaría con el congreso, pero no en Bologna, donde la administración de la alcaldía no había mostrado particular interés; de hecho desde 1987 el congreso de desarrolla ininterrumpidamente en Castel San Pietro, ciudad termal entre dulces colinas, a pocos kilómetros de Bologna; en 1987 se realizó el congreso número 1 y en noviembre de 2016 se realizará el congreso número 30; decidí dar al congreso *Incontri con la matemática* número 1 de 1987 el título: *La matematica e la sua didattica* (*La matemática y su didáctica*)*;*

b) habría fundado una revista que vería la luz en el mismo 1987 con el título: *La matematica e la sua didattica.*

Las actas del congreso número 1 y la revista fueron realizadas por la casa editorial Armando Armando de Roma; esta colaboración se mantuvo por algunos años (de 1987 a 1992) y después, desde 1993, los dos volúmenes pasaron a manos de la editorial Pitagora de Bologna.
El congreso continuó sin tropiezos, proponiendo siempre en tiempo el volumen de las actas, listo en el salón el día mismo de la inauguración; así como nunca tuvimos ni un sólo mes de retardo en la salida de los tantos números de la revista
En el primer número de la revista fueron publicados los siguientes artículos:
Bruno D'Amore y Francesco Speranza: *Editoriale di presentazione della rivista*. *(Editorial de presentación de la revista*).
Douglas Hofstadter: *Ricerche sulle analogie fluide*. (*Investigaciones sobre las analogías fluidas*).
Francesco Speranza: *A che cosa serve la Filosofia della Matematica? (¿Para qué sirve la Filosofía de la matemática?).*
Gianfranco Arrigo: *Un'esperienza di "Mastery Learning" nella scuola elementare*. (*Una experiencia de "Mastery Learning" en la escuela elemental).*

Salvatore Coen: *Qualche spunto di Didattica matematica nelle secondarie superiori*. (*Algunas ideas de Didáctica de la matemática en la secundaria superior*).
Piero Plazzi: *Equazioni differenziali non lineari*. (*Ecuaciones diferenciales no lineales*).
Renzo Vitali: *Lo zero presso i Greci*. (*El cero para los Griegos*).
Nicolò Pintacuda: *Ottimizzazione e Probabilità*. (*Optimización y probabilidad*).
Schede bibliografiche (Reseñas de libros) (a cargo de Bruno D'Amore).
El plano de congreso y revista fue estudiado por mucho tiempo con el maestro, colega y amigo Francesco Speranza y sé de poder afirmar que el espíritu de las iniciativas continúa aún hoy inmutado: proponer un instrumento para que los docentes conozcan temas interesantes de matemática y de didáctica de la matemática, de esta última también resultados de investigación.
La revista tuvo una periodicidad anual el primer año, a partir del segundo año fue semestral y después trimestral; el alto número de suscriptores constituyó un éxito editorial. Me acompañó en esta aventura la pasión y la maestría de mi alumna Silvia Sbaragli, ahora docente en Suiza.
Pero después, en 2006, varias vicisitudes personales (el ir en pensión anticipada, la decisión de vivir la mayor parte de mi vida en el exterior) y relacionales (la desconcertante muerte imprevista de un querido alumno) hicieron que abandonara la empresa; en el último número de la revista (año 23 número 4) apareció lo que sigue:

1. Bruno D'Amore: *In ricordo di Giorgio Tommaso Bagni*. (*En recuerdo de Giorgio Tommaso Bagni*).
2. Bruno D'Amore: *Editoriale*. (*Editorial*).
3. Índice completo de la revista *La matematica e la sua didattica* en sus 23 años de vida.

Este índice, realizado por Anna Borrelli y Tito Pellegrino es por mi considerado un regalo de valor inestimable.
(Para una historia del congreso véase D'Amore, Fandiño Pinilla y Sbaragli, 2012; para una historia de la revista véase D'Amore, 2009; estos dos estudios se pueden encontrar en el sitio: http://www.dm.unibo.it/rsddm).

En realidad la revista no fue nunca cerrada del todo; el título se conservó en el tribunal de Bologna y nunca se retiró; el número ISSN (*International Standard Serial Number*) nunca fue declarado cancelado. Estando así las cosas, hoy se prospecta la posibilidad de renacer, como una estupenda ave fénix que vuelve a nueva vida de sus mismas cenizas: el título, el mismo: ISSN, igual; propietario no ya una editorial sino una asociación de Bologna (*Incontri con la matematica*), la misma que garantiza la logística de nuestro congreso anual de noviembre; los colaboradores, en cabeza de Silvia Sbaragli, son tantos, gozan de mi estima y de mi completa confianza, y constituyen el Comité de

Redacción (véase las páginas precedentes); tantos amigos y colaboradores entusiasmados en aceptar formar parte del comité científico (ídem); un gran número de nombres ilustres a disposición como arbitros secretos (no se vea ni antes ni después, siendo una lista secreta …); periodicidad semestral, por ahora, después veremos.
Gran novedad: la revista es gratuita, descargable de todos nuestros sitios (véase las páginas precedentes) y es sólo on-line, open access. No es de papel, no vale ya la pena, el gasto sería excesivo.

Y así, en este año 2016, en el cual celebramos con tantas novedades el congreso número 30, renace nuestra Revista, después de 6 años de silencio, con fuertes ambiciones y tanta esperanza de dar una mano a la investigación en didáctica de la matemática y a la divulgación tanto de la matemática como de la didáctica de la matemática.
Se publicarán artículos en italiano, español e inglés, la selección se realizará con base en la auto-propuesta de los autores después de una cuidadosa evaluación crítica anónima por parte de dos o tres árbitros, en fin, con todos los criterios de seriedad que una revista de este nivel exige.

Gracias a los miembros del Comité de Redacción, personas serias, expertas y capaces, en quienes tengo confianza total; y gracias a los miembros del Comité Científico, todos queridos amigos, todos con un alto perfil científico, seguidores (obviamente con diferentes posiciones) de la línea científica que quiero dar a la revista.

El mío/nuestro sueño es el de re-crear un instrumento que pueda servir de ayuda a la investigación y a la escuela militante, por una matemática siempre más amada, viva, conocida, apreciada.

Referencias

D'Amore, B. (Compilador) (1986). *Gioco e matematica*. Actas del Congreso Nacional *Incontri con la matematica*, n° 0, septiembre 1986, Bologna]. Bologna: Cappelli.

D'Amore, B. (2009). Editorial. *La matematica e la sua didattica*, *23*(4), 391–394.

D'Amore, B. Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2012). *Origini, storia, modalità e scopi del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica*. www.incontriconlamatematica.net

Rebirth of “La matematica e la sua didattica”. Editorial Volume 24, n. 1-2, November 2016

Bruno D’Amore

In September 1986, in Bologna, the first edition of the conference *Incontri con la Matematica* (*Encounters with mathematics*) took place, it was the number 0 edition. The topic was *Game and mathematics.* The proceedings were printed by the publisher Licinio Cappelli of Bologna that produced a quite elegant and dense text (D’Amore, 1986). Amongst others, Gianfranco Arrigo, Ferdinando Arzarello, Adriano Barlotti, Mario Barra, Michele Emmer, Tito Pellegrino, Ennio Peres, Francesco Speranza, Dario Uri were present as lecturers.
Given the enormous success I decided on the spot two things:

a) to continue the conference, not in Bologna because of the poor interest highlighted by the local government; indeed since 1987 the conference takes place in Castel San Pietro, a thermal city surrounded by gentle hills, a few kilometres from Bologna; in 1987 the number 1 edition took place and in November 2016 the number 30 edition; I decided to give the number 1 edition of the conference *Incontri con la Matematica* the title *La Matematica e la sua Didattica* (*Mathematics and Mathematics Education*);

b) to establish a new journal that started in 1987 with the title *La matematica e la sua didattica*.

The proceedings of the number 1 edition of the conference and the journal were printed by the publisher Armando, in Rome. This collaboration lasted some years (1987–1992), since 1993 both volumes were produced by the editor Pitagora in Bologna.
The conference continued without hitches producing the proceedings in time, ready in the conference hall on the opening ceremony. Neither a month of the delay in the release of the several issues of the journal.
In the first issue of the journal we published the following articles:
Bruno D’Amore e Francesco Speranza: *Editoriale di presentazione della rivista*.
Douglas Hofstadter: *Ricerche sulle analogie fluide*.
Francesco Speranza: *A che cosa serve la Filosofia della Matematica?*
Gianfranco Arrigo: *Un’esperienza di “Mastery Learning” nella scuola elementare*.
Salvatore Coen: *Qualche spunto di Didattica matematica nelle secondarie superiori*.
Piero Plazzi: *Equazioni differenziali non lineari*.
Renzo Vitali: *Lo zero presso i Greci*.
Nicolò Pintacuda: *Ottimizzazione e Probabilità*.
Bibliography notes (by Bruno D’Amore).

The plan of both the conference and the journal has been thoroughly prepared with my master, colleague and friend Francesco Speranza. I claim that the spirit of the initiatives continues unchanged, i.e. to allow teachers to become acquainted with interesting mathematics and mathematics education topics, as regards the latter also with research findings.
The journal started with an annual issue the first year, half-yearly issues the second year, then quarterly issues. The high number of subscribers established its publishing fortune. But I can and I want to claim that most of the journal's success is due to the passion of my student Silvia Sbaragli actually professor en Switzerland.
In 2016 personal events (my early retirement, my decision to live most of my life abroad) and relational events (the upsetting sudden death of a dear student), lead me to the decision to abandon this enterprise. In the last issue of the journal (year 23, number 4) we produced the following:

1. Bruno D'Amore: *In ricordo di Giorgio Tomaso Bagni*.
2. Bruno D'Amore: *Editoriale*.
3. A complete index of the Journal *La matematica e la sua didattica* in its 23 years of life.

I consider this index, created by Anna Borrelli and Tito Pellegrino, a highly valuable gift.
(For a complete history of the conference see D'Amore, Fandiño Pinilla e Sbaragli, 2012; for a history of the journal see D'Amore, 2009; both are available at: http://www.dm.unibo.it/rsddm).
Actually the journal has never been completely closed. The title is still filed in the court of Bologna and it has never been withdrawn. The ISSN number (*International Standard Serial Number*) has never been cancelled. Therefore today we have the possibility to rise just like a wonderful phoenix reborn from the its ashes: same title and ISSN but different owner, no longer the publisher Pitagora but an association from Bologna (*Incontri con la matematica*), the same that handles the logistics of our annual conference that takes place in November. The collaborators, captained by Silvia Sbaragli, are many, they enjoy my esteem and my largest trust. They form the Editorial Board (see the above pages). Many friends are enthusiastic to be part of the Scientific Board (see the above pages). A multitude of outstanding people are ready to be blind reviewers (no page to refer to since it is a secret list …). We start with biannual issues and then we shall see.
There are great changes: the journal is free of charge, downloadable from our websites (see the above pages), it is available only online, open access. We discarded the paper version because too expensive.

Therefore in 2016, the year in which we celebrate with many changes the number 30 edition of the conference, also our journal is reborn. We have strong ambitions and a deep hope to help mathematics education research and

the spread of both mathematics and mathematics education.
We will publish articles in Italian, Spanish and English selected according to the proposal of the authors and after a thorough and critical evaluation of 2 or 3 blind reviewers, as required by the standards of a serious journal.

I would like to thank the members of the Editorial Board, serious, expert, and skilful people that enjoy my full esteem. Many thanks also to the Scientific Board, they are all dear friends, people with very high scientific standards, who agree (even with the obvious differences) with the scientific direction I want for this journal.
My/our dream is to re-build something that can help research and the active school system for a more and more loved, alive, known, and appreciated mathematics.

References

D'Amore, B. (Ed.) (1986). *Gioco e matematica*. Atti del Convegno Nazionale *Incontri con la matematica*, n° 0, settembre 1986, Bologna. Bologna: Cappelli.

D'Amore, B. (2009). Editoriale. *La matematica e la sua didattica*, *23*(4), 391–394.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Sbaragli, S. (2012). *Origini, storia, modalità e scopi del Convegno Nazionale Incontri con la Matematica*. www.incontriconlamatematica.net

Implicazioni delle relazioni fra epistemologia e insegnamento della matematica per lo sviluppo curricolare: il caso della combinatoria

Juan D. Godino e Carmen Batanero
Universidad de Granada

Abstract. *Current trends in the philosophy of mathematics recognize a triple character in this discipline: mathematics as a human endeavor, committed to solving some types of problem situations; mathematics as a symbolic language and a conceptual system logically organized and socially shared, emerging from mathematization activities. Mathematics instruction should be consistent, therefore, with this triple character, both in the general organization of the curriculum, and in the planning of the teacher's actions in the classroom. In this paper we analyze this problem by presenting the design of a curriculum for teaching combinatory at secondary school levels consistent with the these epistemological assumptions.*

Keywords: mathematics education, educational principles, curricular design, didactical units, combinatory

Sunto. *Le attuali tendenze in filosofia della matematica riconoscono un carattere triplice in questa disciplina: la matematica come attività umana, impegnata a risolvere una certa classe di situazioni problematiche; la matematica come linguaggio simbolico; e come un sistema concettuale logicamente organizzato e socialmente condiviso, emergente dall'attività di matematizzazione. L'istruzione matematica deve essere coerente, dunque, con questo carattere ternario, sia nell'organizzazione generale del curricolo, tanto nella pianificazione delle azioni del docente in aula. In questo articolo si analizza il problema, presentando la progettazione di un curriculum per l'insegnamento della combinatoria nei livelli di scuola secondaria, coerente con le ipotesi epistemologiche esplicitate.*

Parole chiave: didattica della matematica, principi didattici, progettazione curricolare, unità didattiche, combinatoria

Resumen. *Las tendencias actuales en filosofía de las matemáticas reconocen un triple carácter en esta disciplina: las matemáticas como quehacer humano, comprometido con la resolución de cierta clase de situaciones problemáticas; las matemáticas como lenguaje simbólico; y como un sistema conceptual lógicamente organizado y socialmente compartido, emergente de la actividad de matematización. La instrucción matemática debe ser coherente, por tanto, con este triple carácter, tanto en la organización general del currículo, como en la planificación de las actuaciones del profesor en el aula. En este trabajo se analiza esta problemática, presentando el diseño de un currículo para la enseñanza de la combinatoria en los niveles de secundaria concordante con los supuestos epistemológicos explicitados.*

Palabras clave: educación matemática, principios didácticos, diseño curricular, unidades didácticas, combinatoria

1. Relazioni fra la matematica e le sue applicazioni

Per quanto l'epistemologia o teoria della conoscenza sia un ramo della filosofia che può apparire distante dagli interessi pratici dell'insegnante, da tempo si riconosce l'importanza che ha una visione adeguata della natura della matematica come elemento condizionante dei distinti modelli di insegnamento, così come del comportamento degli insegnanti in aula (D'Amore, 1987; 2004; Dossey, 1992; Sriraman & English, 2010). Se si pensa, per esempio, che gli oggetti matematici hanno un'esistenza ideale, indipendente dal soggetto e dalla realtà alla quale essi si applicano, indipendenti perfino dalla cultura, risulterebbe giustificato un insegnamento basato sulla presentazione formale degli oggetti matematici, i quali sarebbero a loro volta fondati sulle loro stesse definizioni. Le applicazioni, i problemi matematici, sarebbero, in questa concezione, un'appendice e in un certo senso sarebbero solo degli "ornamenti" che verrebbero trattati dopo che l'allievo abbia già appreso la matematica. In larga misura, la pratica dell'insegnamento della matematica nei passati decenni è stata dominata da questa concezione.

Se si pensa, al contrario, che la matematica è una costruzione umana che sorge come conseguenza della necessità e della curiosità dell'essere umano di risolvere certe classi di problemi o situazioni determinate dall'ambiente; e che, nello stesso tempo, nell'invenzione degli oggetti matematici ha luogo un processo di negoziazione sociale e che questi oggetti sono fallibili e soggetti a evoluzione; allora l'insegnamento e l'apprendimento devono tener conto di tali processi. Quest'ultima è la posizione delle teorie psicologiche costruttiviste, basate sul costruttivismo sociale come filosofia della matematica, così come descritto da Ernest (1998).

Questa dicotomia fra idealismo-formalista e costruttivismo fu descritta, nel caso della combinatoria, da Kapur (1970) il quale, in piena effervescenza della "matematica moderna", si dichiarava a favore di uno sviluppo del curricolo matematico che riconoscesse il ruolo essenziale delle applicazioni alla crescita della matematica e, pertanto, al suo insegnamento-apprendimento. Nel testo menzionato, Kapur presenta una raccolta di problemi di combinatoria il cui trattamento scolare avrebbe potuto soffocare il movimento di riforma che cercava di impostare un "baby Bourbaki" come testo di insegnamento della matematica pre-universitaria, in consonanza con il Bourbaki universitario. Per quanto si siano oggi superate queste idee della "matematica moderna", un'analisi di questo tipo può ancora essere necessaria da parte del neo laureato che inizia la sua carriera come insegnante e che appena conosce un'altra matematica, al di là di quella "formale" studiata nel corso di laurea universitario.

Nell'articolo citato, Kapur descrive due concezioni estreme sulle relazioni fra la matematica come disciplina scientifica, le sue applicazioni e il ruolo di esse nei processi di insegnamento-apprendimento e che abbiamo mostrato in vari nostri lavori (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2003). La prima di queste concezioni, ancora oggi sostenuta da alcuni matematici, consiste nell'assumere che si debbano prima costruire le strutture della matematica in maniera assiomatica, rigorosa, astratta e logica e solo dopo sovrapporre a queste le strutture delle loro possibili applicazioni. Secondo questa visione non si possono risolvere problemi di applicazione, a meno che non siano banali, se prima non si è dato un buon "fondamento matematico". Per coloro che accettano questa visione, la matematica pura non ha motivi per avere una stretta relazione con la matematica applicata; essa potrebbe svilupparsi in forma del tutto separata. L'apprendimento dei concetti – in generale, l'acquisizione di strutture di pensiero matematico puro – deve prodursi precedentemente allo sviluppo delle applicazioni. Queste sarebbero un' "appendice" all'insieme dei metodi matematici e non si produrrebbe alcun danno se tale appendice non fosse tenuta in conto da parte dello studente. Le persone che sostengono questo modo di vedere pensano che la matematica (necessariamente al singolare) è una disciplina autonoma che può mantenere intatta la sua vitalità solo per mezzo di una pura endogamia. Sotto le assunzioni di questa concezione "idealista-platonica" della matematica si può costruire un curricolo quasi perfetto, esteticamente soddisfacente: filtrato dal processo di astrazione sarebbe un dominio di pensiero purificato dal "rumore" del mondo esterno.

Proseguendo con l'esposizione della posizione di Kapur (1970), una seconda concezione sulla matematica considera, al contrario, che la matematica e le sue applicazioni debbano mantenersi in intima relazione lungo il curricolo. In tale concezione, ampiamente assunta da diversi approcci teorici usati nella didattica della matematica attuale, gli studenti dovrebbero capire la necessità di ciascuna parte della matematica prima ancora che essa sia loro presentata. Si pensa perfino che gli studenti dovrebbero "creare" da sé stessi questi contenuti e comprendere come queste matematiche create soddisfino la necessità avvertita (per risolvere un problema o rispondere a una domanda). Se si accetta questo atteggiamento, le applicazioni della matematica, tanto esterne quanto interne, dovrebbero precedere e seguire la creazione della matematica; questa deve apparire come una risposta naturale e spontanea della mente e della creatività umana ai problemi dell'ambiente fisico, biologico e sociale nel quale l'uomo vive. Quando si applica questa concezione all'insegnamento, si assume che gli studenti debbano vedere da sé stessi che l'assiomatizzazione, la generalizzazione e l'astrazione della matematica sono necessarie al fine di comprendere i problemi della Natura e della Società. I sostenitori di questa visione della matematica e del suo insegnamento desidererebbero poter isolare alcune strutture fondamentali della Natura e della Società e costruire le strutture fondamentali della matematica attorno ad esse, in modo che abbia luogo un'integrazione la più perfetta possibile fra la matematica e le sue applicazioni.

L'elaborazione di piani di formazione matematica in accordo con questa concezione *costruttivista* è più difficile, dato che le strutture delle scienze fisiche, biologiche e sociali sono relativamente più complesse e inoltre il professore di matematica dovrebbe acquisire conoscenza dei temi che userà come base per le applicazioni. Pertanto, il riconoscimento dei legami delle strutture di queste scienze con quelle puramente matematiche non è facile. C'è un'abbondanza di materiale disperso che deve essere scelto, però il compito di selezione e integrazione, così come la coordinazione con altre restrizioni del sistema di insegnamento, non sono facili da ottenere.

2. La matematica come attività umana, linguaggio simbolico e sistema concettuale

Tenendo in conto recenti tendenze in filosofia della matematica (Ernest, 1998; Tymoszko, 1986), che sintetizzano posizioni di autori come Wittgenstein e Lakatos, Godino, Batanero e Font (2003) distinguono nella matematica i tre aspetti essenziali seguenti, interrelazioni mutue che devono essere tenuti in conto nell'organizzazione del suo insegnamento.

a. La matematica costituisce un'attività socialmente compartita di risoluzione di situazioni problematiche che si possono riferire al mondo naturale e sociale, o anche possono essere interne alla matematica stessa. Come risposta o risoluzione di questi problemi esterni o interni sorgono e si sviluppano progressivamente gli oggetti matematici (concetti, processi, teorie, …).

b. La matematica può vedersi come un linguaggio simbolico nel quale si esprimono le situazioni-problema e la risoluzione degli stessi; così come la musica, la matematica è un linguaggio universale nel quale i segni usati, la loro semantica e sintassi sono compartiti in tutti i diversi gruppi umani. Come ogni linguaggio, anche questo comporta alcune regole di uso che bisogna conoscere e il loro apprendimento può comportare difficoltà simili all'apprendimento di una lingua non materna.

c. La matematica costituisce un sistema concettuale, logicamente organizzato e socialmente compartito; l'organizzazione logica dei concetti, teoremi e proprietà spiega anche il grande numero delle difficoltà nell'apprendimento; un sistema non può ridursi alle sue componenti isolate, giacché le interrelazioni tra gli stessi ne costituiscono una parte essenziale. Nasce così un paradosso nell'insegnamento della matematica: ciascun concetto non può insegnarsi adeguatamente in forma separata dagli altri concetti; e nemmeno possono insegnarsi i diversi concetti simultaneamente; di conseguenza, si potrebbe pensare che il suo insegnamento è impossibile. Questo problema si risolve, almeno parzialmente, con la considerazione del curricolo "a spirale" (Bruner, 1960); ogni concetto è trattato varie volte lungo il corso dell'insegnamento, le prime volte in modo implicito; progressivamente lo si assume come oggetto di studio in sé stesso, aumentandone il grado di complessità e completezza.

La matematica dunque costituisce una *realtà culturale* costituita da concetti, enunciati, teorie, … (gli oggetti matematici) e il cui significato personale e istituzionale è intimamente legato ai sistemi di pratiche realizzate per la risoluzione delle situazioni-problema (Godino & Batanero, 1994; Godino, Batanero, & Font, 2007).

Come ingredienti caratteristici dell'attività di matematizzazione (Freudenthal, 1991) possiamo evidenziare la rappresentazione simbolica, la ricerca dell'essenziale fra i diversi contesti, situazioni, problemi o processi, la generalizzazione, l'assiomatizzazione, la validazione etc.

3. Conoscere e apprendere la matematica: la sua relazione con la risoluzione dei problemi

Come conseguenza di questa concettualizzazione della conoscenza matematica, *conoscere* o *sapere* matematica, da parte di una persona, non può ridursi a identificare definizioni e proprietà degli oggetti matematici. Deve implicare l'essere in grado di usare il linguaggio e il sistema concettuale matematico nella risoluzione dei problemi. Un soggetto non può attribuire un senso pieno agli oggetti matematici a meno che questi si relazionino con l'attività dalla quale emergono in modo indissolubile (Font, Godino, & Gallardo, 2013).

Di conseguenza, l'attività di risoluzione di problemi è uno dei pilastri dell'apprendimento significativo della matematica. La risoluzione di problemi non deve considerarsi come un nuovo contenuto da aggregare al curricolo matematico, come un'appendice dell'insegnamento tradizionale. Tale attività è uno dei veicoli essenziali dell'apprendimento della matematica, oltre che una fonte di motivazione intrinseca verso la stessa, dato che permette di contestualizzare e personalizzare le conoscenze. Essa permette, altresì, di attribuire significato alle pratiche di tipo matematico realizzate, mediante il riconoscimento di una finalità o intenzione alle stesse (Godino & Batanero, 1994). D'accordo con Brousseau (1986, 1998), il lavoro intellettuale dell'allievo deve essere in certi momenti paragonabile a quello degli stessi matematici: l'allievo dovrebbe avere l'opportunità di fare ricerca su alcuni problemi alla sua portata, formulare, dimostrare, costruire modelli, linguaggi, concetti, teorie, scambiare le proprie idee con altri, riconoscere quelle che sono conformi con la cultura matematica, adottare le idee che possono essergli utili. Al contrario, il lavoro dell'insegnante è in un certo qual senso inverso a quello del matematico professionista: deve produrre ri-contestualizzazioni e una ri-personalizzazione delle conoscenze, dato che deve trovare le situazioni migliori che diano senso a queste conoscenze e aiutare l'allievo nella ricerca delle risoluzioni.

La dimensione culturale della conoscenza matematica è tenuta in conto nell'epistemologia descritta da Brousseau nel proporre che il professore debba offrire agli allievi i mezzi per trovare quel che è il "sapere culturale" che si vuole insegnare loro. Gli allievi devono, a loro volta, ri-decontestualizzare e ri-depersonalizzare il proprio sapere in modo tale da identificare la propria produzione con il sapere che si usa nella comunità scientifica e culturale della sua epoca.

Questa formulazione dell'apprendimento matematico è in relazione con le teorie costruttiviste, ampiamente assunte in modo diffuso, come è provato dalla loro inclusione in documenti curricolari di ampia diffusione (NCTM, 2000):

> Gli studenti apprendono più e meglio quando essi stessi assumono il controllo del proprio apprendimento definendo i propri obiettivi e controllando il proprio progresso. Quando si tratta di sfide con compiti scelti in modo appropriato, gli studenti acquistano fiducia nella propria abilità di affrontare problemi difficili, desiderano risolvere le cose da sé stessi, mostrano flessibilità nell'esplorare idee matematiche e cercare vie di risoluzione alternative, e disposizione alla perseveranza. (NCTM, 2000, p. 20)

I punti di vista costruttivisti sull'apprendimento spostano il centro d'attenzione verso i processi propri della disciplina, il lavoro concreto, la realizzazione di progetti e risoluzione di problemi, invece di dar priorità allo studio dei fatti, leggi, principi e teorie che costituiscono il corpo di conoscenze di detta disciplina.

4. Insegnamento della matematica: necessità di una teoria delle situazioni didattiche

Come s'è detto, in termini generali, la nostra concezione della matematica e del suo apprendimento si situa nell'ambito della posizione costruttivista. Ciò nonostante, consideriamo che l'apprendimento di concetti scientifici complessi, in adolescenti e persone adulte, non segua solo i modelli del costruttivismo individualista in senso stretto (Godino, Batanero, Cañadas, & Contreras, 2015). È necessario indagare sull'applicazione, nell'insegnamento della matematica, di teorie cognitive dell'apprendimento maggiormente integratrici, come quelle di Vygotskij e Ausubel, e agli approcci didattici di educatori matematici come Freudenthal (1991), con la sua proposta metodologica per l'insegnamento della matematica che denomina "reinvenzione guidata", o la Teoria delle situazioni didattiche di Brousseau

(1986, 1998).

Un'interpretazione ingenua del costruttivismo conduce ad attribuire un ruolo limitato all'insegnamento, cioè al lavoro del docente nella sua attività di facilitare l'apprendimento; questo lavoro si ridurrebbe alla scelta di situazioni problematiche significative per gli allievi.

Come abbiamo detto, la matematica non costituisce solo un'attività ma anche un linguaggio simbolico e un sistema concettuale logicamente organizzato, per quanto non in una gerarchia stretta di livelli di astrazione e complessità. Se consideriamo l'apprendimento di una lingua, per quanto la pratica nella conversazione fin dall'inizio da parte dell'apprendente sia una questione fondamentale, se vogliano ottenere un apprendimento funzionale che permetta la comunicazione, il progresso conseguito, una volta superata la tappa iniziale, è molto scarso se non si realizza anche uno studio sistematico della grammatica di tale lingua.

D'altra parte, disponiamo di tutto un sistema concettuale previo che ci è dato dalla risoluzione di una grande quantità di problemi e che risulta dal lavoro precedente delle menti matematiche più capaci. Questa eredità resterebbe inutilizzata se ogni studente dovesse riscoprire da sé stesso tutta la matematica che si cerca di fargli apprendere. La scienza, in particolare la matematica, non si costruisce nel vuoto, ma sopra i pilastri delle conoscenze costruite dai nostri predecessori. Lo scopo dell'insegnamento della matematica non è solo rendere gli allievi capaci di risolvere quei problemi la cui risoluzione già conosciamo, ma prepararli a risolvere problemi che ancora non siamo in grado di risolvere. A tale scopo, dobbiamo abituarli a un lavoro matematico autentico, che non include solo la risoluzione dei problemi, ma anche l'uso delle conoscenze previe nelle loro stesse risoluzioni.

Di conseguenza, consideriamo che le teorie associazionistiche dell'apprendimento (Ausubel, Novak, & Hanesian, 1983) applicate alla formazione di concetti e alla conoscenza di certe relazioni e rappresentazioni si può ottenere in modo efficace con l'aiuto delle spiegazioni del docente e con l'interazione sociale in aula, congiunta all'attività di risoluzione di problemi.

L'attenzione sistematica ai tre aspetti o dimensioni della matematica (attività, linguaggio, rete concettuale) è alla base, ci sembra, della Teoria delle situazioni didattiche di Brousseau (1986, 1998), che propone la progettazione di situazione di formulazione/comunicazione, validazione e istituzionalizzazione come complementi imprescindibili delle situazioni di azione e di ricerca. Il tipo di discorso, cioè la comunicazione orale o scritta in aula, realizzata dal docente e dagli allievi, è un aspetto centrale determinante del fatto che gli allievi apprendano qualcosa sulla matematica. Se il nucleo della comunicazione si produce solo da parte del docente verso gli allievi, per esempio in forma scritta sulla lavagna, gli allievi apprenderanno una matematica diversa, acquisiranno una visione diversa della matematica, rispetto a quel che si produce quando ha luogo una comunicazione più ricca e diversificata fra docente e allievi e di questi ultimi fra loro.

Inoltre, le situazioni di azione devono basarsi su problemi genuini que attraggano l'interesse degli allievi affinché essi li assumano come propri e desiderino risolverli; tali situazioni costituiscono un primo incontro degli allievi con gli oggetti matematici impliciti, incontro nel quale si offre l'opportunità di ricercare da sé stessi possibili risoluzioni, individualmente o in piccoli gruppi.

La Teoria delle situazioni didattiche formulata da Brousseau costituisce, dal nostro punto di vista, una teoria dell'apprendimento organizzato della matematica, cioè una teoria dell'insegnamento della matematica, in accordo con i presupposti epistemologici e psicologici mostrarti in precedenza. Descrive un ambiente di apprendimento potente nel quale non solo si presta attenzione al sapere matematico posto in gioco nelle proposte di lavoro, ma anche alle attività di comunicazioni in aula, tutto ciò in una sequenza ordinata di situazioni didattiche.

5. Implicazioni per lo sviluppo curricolare: il caso della combinatoria nella secondaria

La prospettiva della matematica e del suo insegnamento abbozzati nei paragrafi precedenti deve avere conseguenze sulla progettazione di piani di educazione matematica, cioè nel curricolo matematico, inteso come un piano operativo che descrive in dettaglio che tipo di matematica devono conoscere gli allievi, che cosa devono fare i docenti per far sì che i propri allievi sviluppino proprie conoscenze matematiche e quale deve essere il contesto nel quale abbia luogo il processo di insegnamento - apprendimento (NCTM, 1989).

Nel seguito, sintetizziamo le ipotesi didattiche che a nostro avviso devono guidare l'elaborazione di proposte curricolari per l'educazione matematica, che siano coerenti con i presupposti epistemologici evidenziati in precedenza.

1. Lo scopo principale dell'azione del docente in aula è quello di aiutare gli allievi a sviluppare il proprio ragionamento matematico, la loro capacità di risolvere problemi, di formulazione e comunicazione di idee matematiche e lo stabilire relazioni fra le diverse parti della matematica e delle altre discipline. Allo stesso tempo, è prioritario favorire una buona disponibilità verso la matematica e il suo operare.

2. Si deve prestare un'attenzione particolare all'organizzazione dell'insegnamento e dell'apprendimento: quel che gli allievi apprendono dipende fondamentalmente da come si realizza l'apprendimento. Quest'affermazione comporta, oltre che una meticolosa selezione dei compiti, la progettazione di situazioni didattiche che forniscano opportunità agli allievi di indagare personalmente problemi significativi per loro stessi e rilevanti dal punto di vista matematico, a formulare ipotesi

e congetture, usare diversi tipi di rappresentazioni; a validare le proprie risoluzioni e comunicarle agli altri, all’interno di un clima cooperativo e di discussione scientifica.

3. Bisogna condurre l’allievo al riconoscimento progressivo del grado di sviluppo attuale della matematica, come insieme di conoscenze e della sua applicabilità in distinti rami dell’attività umana. Lo scopo che si vuol perseguire è l’assimilazione progressiva della conoscenza matematica da parte degli allievi, cioè la costruzione di una rete di concetti e processi, così come il dominio del linguaggio matematico, in accordo con la conoscenza matematica obiettiva. A questo scopo si devono progettare situazioni specifiche di istituzionalizzazione delle conoscenze che si pretende raggiungere.
4. Il curricolo deve essere flessibile per poter essere adattato alle capacità dei diversi allievi.
5. Gli obiettivi relativi all’apprendere a realizzare congetture e argomenti, formulare e risolvere problemi, dunque un apprendimento significativo della matematica, devono essere raggiunti da tutti gli allievi. Per questo si devono proporre situazioni problematiche introduttive sulle quali tutta la classe possa lavorare; ma, in più, si devono proporre attività di sviluppo e suggerimenti per gli alunni più capaci.
6. L’osservazione continua dei processi di insegnamento-apprendimento deve essere la strategia principale per la valutazione degli stessi.

5.1. Elementi per una progettazione curricolare per l’insegnamento dell’analisi combinatoria

A mo’ di esempio, descriviamo, di seguito, i principali elementi di una proposta di sviluppo curricolare della combinatoria, presentata con dettagli in Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1994). L’organizzazione generale di questo curricolo tiene conto della struttura della combinatoria, il campo di problemi che danno senso alla stessa, così come gli aspetti rappresentativi e simbolici. Gli atteggiamenti matematici e la valorizzazione dell’attività matematica da parte degli studenti si otterranno come conseguenza del progetto globale del curricolo e delle relazioni personali e affettive che il docente perseguirà in aula.

In Spagna, l’insegnamento della combinatoria è rimasto isolato dal resto dei temi del curricolo matematico, fatta eccezione della probabilità. Questo insegnamento si è centrato nell’apprendimento di formule combinatorie e nella realizzazione di esercizi di calcolo di espressioni combinatorie, o nell’identificazione dell’operazione combinatoria contenuta in un enunciato verbale. Forse a causa di questa impostazione, il tema è stato considerato come uno dei più difficili da parte dei docenti i quali, con frequenza, hanno preferito omettere il suo insegnamento. Perfino nelle progettazioni curricolari (MEC, 2007; MECD, 2014), il tema è stato praticamente soppresso, essendo ridotto a una timida menzione nel conteggio e nei diagrammi ad albero all'interno del tema dedicato alla probabilità.

Queste omissioni contrastano con le proposte degli "Standard" del NCTM (National Council of Teachers of Mathematics degli USA) (1989), nelle quali si afferma che il ragionamento combinatorio è uno strumento utile negli schemi cognitivi degli studenti dato che è la base della matematica discreta, il cui insegnamento è stato invocato da numerosi autori (Kenney & Hirsch, 1991). Nei Principi e Norme 2000 (NCTM, 2000) si includono le principali questioni di questo ramo della matematica, che si distribuiscono attraverso differenti Norme di contenuto, invece di ricevere un trattamento separato, e si trattano a tutti i livelli scolastici. Tali questioni appaiono come componenti attive della matematica contemporanea, ampiamente utilizzate nelle scienze biologiche, nella fisica e nella chimica (Batanero, Godino, & Navarro-Pelayo, 1997; English, 2005).

I problemi combinatori costituiscono un mezzo eccellente per far sì che gli studenti realizzino attività di matematizzazione, per dar significato ad altri strumenti concettuali di base e per porre in relazione diversi rami della matematica fra loro. Si deve poi ricordare che la capacità combinatoria è considerata, da parte di Piaget e Inhelder (1951), come un costituente fondamentale del ragionamento formale e che Fischbein (1975) sottolinea la necessità di stimolare lo sviluppo psicoevolutivo del ragionamento combinatorio mediante un'istruzione appropriata. Per tutto ciò, il ragionamento combinatorio non si sviluppa in modo spontaneo e l'insegnamento che si è proposto fino a oggi non sembra migliorare il ragionamento combinatorio né negli allievi della secondaria né in quelli con una preparazione matematica avanzata (Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino, 1997; Godino, Batanero, & Roa, 2005).

Per le ragioni descritte, la combinatoria dovrebbe essere una parte integrante del curricolo e svilupparsi lungo diverse tappe educative, seguendo l'idea di curricolo a spirale. Una prima scelta nell'elaborazione di tale curricolo è la sua distribuzione lungo un prolungato periodo di tempo. In Batanero et al. (1994) si propongono unità didattiche dall'ultimo anno di educazione primaria (età degli allievi 10-11 anni) fino alla fine della scuola secondaria (età degli allievi 17-18 anni). I concetti e i processi si presentano ciclicamente, incrementando progressivamente la profondità dello studio. Invece di limitarci alle classiche unità su variazioni, combinazioni e permutazioni, l'analisi combinatoria elementare si presenta strutturata in accordo a tre modelli specifici che permettono di risolvere una grande quantità di problemi combinatori, tanto semplici quando complessi: i modelli di campionatura, la collocazione di oggetti in urne e di partizione di insiemi (Batanero, Navarro-Pelayo, & Godino,1997). La potenza dei processi combinatori si presenta anche in riferimento alle successioni ricorsive, metodi logici, grafi a albero etc. che si usano per connettere il tema con la matematica discreta, della quale l'analisi combinatoria è un nucleo centrale (English, 2005).

Noi riteniamo che il curricolo matematico deve tener conto della struttura dei campi concettuali e procedimentali corrispondenti, della loro indipendenza rispetto ai campi di situazioni-problema prototipici dai quali emergono e alle peculiarità del linguaggio simbolico matematico. Assumendo questa idea di curricolo e tenendo conto dei supposti epistemologici e didattici enunciati nei paragrafi anteriori, la nostra proposta di un curricolo per l'insegnamento della combinatoria sviluppata in Batanero et al. (1994) include i seguenti elementi.

a. Una rassegna di problemi combinatori nei quali sono rappresentati sistematicamente i distinti tipi di problemi e situazioni di uso e le variabili di compito corrispondenti, classificati secondo livelli di complessità. La combinatoria è stata divisa in una serie di nuclei tematici (Tabella 1), per ciascuno dei quali abbiamo selezionato una sequenza di situazioni-problema che, dal nostro punto di vista, danno senso a tale nucleo concettuale o procedimentale, mostrando agli allievi la gamma di diverse applicazioni della combinatoria e i suoi legami con altre nozioni matematiche. Nella Tabella 2 si classificano i problemi combinatori secondo diversi criteri. La Tabella 3 descrive i contesti di applicazione inclusi nella raccolta di problemi facenti parte della proposta curricolare.
b. I concetti, modelli e tecniche combinatorie elementari emergono e acquistano senso attraverso la messa in evidenza di situazioni-problema e delimitano la conoscenza matematica obiettivo dell'analisi combinatoria elementare. La Tabella 4 contiene i diversi modelli combinatori e i processi tenuti in conto nello sviluppo delle diverse unità didattiche.

Tabella 1
Relazione di unità didattiche

Insegnamento primario 1. Enumerazione sistematica. 2. Regola del prodotto e diagrammi ad albero. **Insegnamento secondario di I grado** 3. Grafi. Regola della somma. 4. Modello del collocamento. Caso di oggetti distinti. 5. Modello del collocamento. Caso di oggetti indistinguibili.	**Insegnamento secondario (biennio della scuola secondaria di II grado)** 6. Campioni ordinati. Variazioni. 7. Permutazioni. Numeri fattoriali. 8. Campioni non ordinati. Combinazioni. **Insegnamento secondario (triennio della scuola secondaria di II grado)** 9. Collocazione e distribuzione di oggetti. 10. Sottopopolazioni e partizioni. Numeri della combinatoria. 11. Principio di inclusione ed esclusione. Altri metodi logici. 12. Procedimenti analitici. Funzioni generatrici.

Tabella 2
Classificazione dei problemi combinatori

In base alla soluzione richiesta: – esistenza – enumerazione – conteggio – classificazione – ottimizzazione – proprietà dei numeri combinatori e manipolazioni algebriche **In base al numero di operazioni combinatorie:** – semplice – composto **In base al modello combinatorio implicito nell'enunciato:** – selezione – collocazione – partizione – ordinamento	**In base al tipo di oggetti che si combinano:** – persone – numeri – lettere – oggetti **In base alla grandezza dei parametri e se sono variabili:** – piccoli – grandi – non variabili – variabili

Tabella 3
Contesti di applicazione della combinatoria

Probabilità: Enumerazione di possibilità Applicazione della regola di Laplace Distribuzioni discrete di probabilità Cammini aleatori Numeri aleatori; aleatorietà Coincidenze **Statistica:** Calcolo di momenti Progettazione di esperimenti Campionatura **Geometria:** Ricoprimenti piani Figure geometriche Intersezioni, reticolati Composizioni di figure	**Biologia:** Trasmissione di caratteri ereditari Codice genetico **Fisica:** Teoria cinetica dei gas **Chimica:** Enumerazione degli isomeri **Teoria dei grafi:** Cammini, circuiti, traiettorie Colorare vertici, spigoli, regioni **Matematica ricreativa e giochi:** Quadrati magici Arte, disegno, attività manuali Passatempi numerici Domino Scacchi

Teoria dei numeri: Numeri figurati Decomposizione di un numero naturale in addendi Numero dei divisori di un naturale Divisibilità Sistemi di numerazione Aritmetica modulare Numeri interi **Algebra:** Gruppi di permutazioni; gruppi ciclici Potenza del binomio; triangolo di Pascal Matrici, Determinanti Equazioni con soluzioni intere Funzioni polinomiali; sviluppo in serie Teoria degli insiemi; applicazioni	Altri **Scienza della computazione:** Immagazzinamento dell'informazione Codici e linguaggi Algoritmi **Ricerca Operativa:** Determinazione di strade; trasporti Assegnazioni Distribuzione e collocamento di oggetti e persone Organizzazione de comitati, tornei Produzione

Tabella 4
Modelli e processi combinatori

MODELLI COMBINATORI **1. Modello di selezione:** Popolazione e campionatura Campionatura ordinata con sostituzione: – Variazioni con ripetizione Campionatura ordinata senza sostituzione: – Variazioni; Permutazioni – Permutazioni con ripetizione – Permutazioni circolari – Combinazioni – Combinazioni con ripetizioni **2. Modello di collocazione/assegnazione: applicazioni** Collocazione di oggetti distinguibili in caselle distinte: 1. Applicazioni iniettive: variazioni 2. Applicazioni biiettive: permutazioni 3. Applicazioni qualsiasi: variazioni con ripetizione Collocazione di oggetti indistinguibili in caselle distinte:	PROCEDIMENTI COMBINATORI **Procedimenti grafici:** Diagrammi a albero Grafi **Procedimenti numerici:** Regole basiche di calcolo combinatorio: – Regola del prodotto – Regola della somma – Regola del quoziente Numeri combinatori Numeri fattoriali Numeri di Stirling **Procedimenti logici:** Classificazione Dimostrazione per assurdo Dimostrazione per induzione Enumerazione sistematica Principio di inclusione-esclusione Ricorsività

– Applicazioni iniettive: combinazioni – Applicazioni qualsiasi: combinazioni con ripetizione – Altre possibilità nel modello di collocazione **3. Modello di partizione:** – Traduzione al modello di collocazione – Caso della bipartizione	**Procedimenti tabulari:** Matrici Tavole **Procedimenti analitici:** Funzioni generatrici

5.2. Elementi per la programmazione d'aula

Nel testo citato di Batanero et al. (1994) si offre al docente un'informazione di base per la progettazione di unità didattiche in accordo con i principi pedagogici che abbiamo descritto in precedenza. Proponiamo che ciascuna unità sia organizzata attorno a un contenuto matematico o a un processo il cui apprendimento si auspica in modo specifico. Questo non significa che tale oggetto matematico si tratti solo in detta unità, né che appaia isolato. Tutto al contrario, in ciascuna unità si "lavorerà" con un ricco "sciame" di oggetti, la maggior parte in modo implicito, cioè come una ferramenta concettuale che interviene nella risoluzione di problemi. Inoltre, il contenuto preteso in una unità sarà usato e posto in relazione con altri in distinte unità, il che completa il suo significato.

L'informazione che proponiamo al docente su ciascuna unità sotto forma di orientamenti metodologici (non prescrittivi, per quanto a volte scriviamo "si dovrebbe…"), può essere utile per l'elaborazione dei suoi progetti curricolari di aula sul tema della combinatoria. Questa informazione è stata strutturata nei quattro punti che descriviamo qui di seguito.

Descrittori dell'unità

Qui indichiamo il livello di insegnamento per il quale l'unità è proposta, gli obiettivi prioritari attesi, i contenuti (concetti, proprietà e processi) che compongono il contenuto indicato nel titolo dell'unità, i requisiti previ che, in relazione alla conoscenza, gli allievi devo possedere per lo sviluppo dell'unità e l'eventuale materiale manipolativo, quando se ne presenti qualcuno.

Situazioni, problemi, esercizi

In questo paragrafo forniamo una raccolta di enunciati di situazioni problematiche attorno alle quali dovrebbe far perno l'attività di classe e il discorso di allievi e docente. Queste attività le classifichiamo in 3 gruppi: (1) situazioni introduttive; (2) situazioni complementari; (3) esercizi e applicazioni.

Nelle situazioni introduttive e complementari si propongono attività dalle quali emerge in modo specifico il contenuto atteso nell'unità. Generalmente, per ogni situazione si propongono varie questioni di complessità progressiva, cominciando con domande nelle quali si lascia che sia lo studente a esplorare il problema traendo le proprie risoluzioni. Esse costituiscono pertanto le consegne iniziali per generare in classe un ambiente che promuova l'interesse degli allievi (o, almeno, così si spera) e un atteggiamento da ricercatore da parte degli stessi.

Le situazioni e le domande che seguono servono a introdurre diverse variabili di compito e livelli di complessità del contenuto proposto e tentano progressivamente di approfondire tale contenuto, guidando l'allievo nella sua propria costruzione di conoscenza. Dunque, possono essere usate per tener conto della diversità delle capacità degli allievi. Per quanto inizialmente tutti gli allievi possono lavorare sopra una stessa situazione introduttiva, le domande più complesse e le situazioni complementari più complesse possono essere proposte agli allievi più interessati.

Gli enunciati degli esercizi e applicazioni rispondono alla necessità che gli allievi acquisiscano un certo dominio delle tecniche introdotte e le applichino a nuove situazioni.

Analisi dei contenuti e della gestione della classe

Come abbiamo detto, la teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986, 1998) che ci serve di riferimento evidenzia il ruolo delle situazioni di azione per far sì che gli allievi diano senso alle nozioni e ai processi della matematica. Però sarebbe ingenuo pensare che, proponendo problemi più o meno ingegnosi agli allievi, questi possano ricreare tutta la matematica. Così, dietro a ogni situazione di azione, nella quale gli allievi hanno cercato di trovare e di formulare le risposte pertinenti (lavorando in gruppo, preferibilmente) è necessario organizzare situazioni (o momenti) di comunicazione dei risultati e di argomentazione o validazione dei risultati proposti.

In questo modo si sarà ottenuto di creare condizioni propizie per il momento o situazioni di istituzionalizzazione delle conoscenze attese, con il grado di formalizzazione che il docente giudichi pertinente secondo lo sviluppo delle situazioni previe e il livello specifico degli allievi. Nello stesso modo, il docente dovrà fare riferimento ad altri oggetti matematici già conosciuti dagli studenti e a problemi trattati precedentemente; questo aiuterà a stabilire collegamenti matematici fra i vari temi.

Tutto questo lavoro del docente racchiude una notevole complessità ed è di grande importanza, giacché piccoli cambi nella gestione della classe (nell'ordine: presentazione delle diverse problematiche, suggerimenti che si offrono agli studenti in momenti chiave dei processi di risoluzione, considerazioni sul grado di formalizzazione finale) condizionano l'apprendimento raggiunto dagli allievi.

Allo scopo di cercare di aiutare il professore in questo delicato lavoro, abbiamo incluso nella sezione che chiamiamo "analisi dei contenuti e della gestione di classe" alcune indicazioni su possibili connessioni matematiche e sul tipo di istituzionalizzazione auspicabile. Come si descrive in Godino, Batanero, Cañadas e Contreras (2015), per quanto sia necessario stabilire progetti istituzionali basati sull'uso di situazioni-problema interessanti, che guidino l'apprendimento e la presa di decisioni a livello globale e intermedio, il funzionamento locale dei sistemi didattici richiede un'attenzione speciale alla gestione delle conoscenze previe necessarie degli studenti per la risoluzione delle situazioni e alla sistematizzazione delle conoscenze emergenti. Le decisioni sul tipo di aiuto che è necessario dare agli studenti hanno una componente essenzialmente locale e sono responsabilità del docente, il quale necessiterà di guide che lo orientino nella presa in carico di decisioni per ottimizzare l'idoneità didattica dei processi di studio che deve gestire.

Risoluzioni di situazioni, problemi e esercizi

Per quanto crediamo che i docenti ai quali si dirige il libro citato siano assolutamente in grado di risolvere le questioni che si propongono nelle diverse unità, abbiamo creduto fosse conveniente offrire le risoluzioni delle stesse. In alcuni casi perché la risoluzione può richiedere un tempo eccessivo del quale il docente abitualmente non dispone. Inoltre, solo mediante un esame dettagliato dei possibili processi di risoluzione si possono apprezzare i concetti, i processi matematici, le proposizioni e le argomentazioni che si succedono e si sviluppano negli stessi, le difficoltà specifiche che possono sorgere e la tipologia specifica del ragionamento combinatorio che interessa sviluppare.

Come esempio includiamo qui di seguito in un annesso un'unità didattica sulla "regola del prodotto e diagrammi ad albero" sviluppata secondo lo schema che abbiamo descritto sopra.

6. Conclusioni

Nel presente lavoro abbiamo esplicitato la nostra concezione per quanto riguarda la natura della matematica, così come le conseguenze relative all'insegnamento che, secondo il nostro criterio, derivano dalla stessa. Abbiamo anche spiegato come sono stati tenuti in conto questi principi nell'elaborazione di un curricolo di combinatoria, analizzando le decisioni prese nella sua elaborazione e presentando come annesso un esempio di unità didattica.

Crediamo che l'attenzione ai tre aspetti della conoscenza matematica (agire, linguaggio, sistema concettuale) nei processi di insegnamento-apprendimento rende più complesso il lavoro del docente nelle aule, e pertanto si mette in evidenza lo sviluppo di materiali curricolari che, senza soffocare la sua necessaria creatività, rendono percorribile un rinnovamento dell'educazione matematica. La scelta precisa di situazioni problematiche prototipiche di una conoscenza profonda nel campo di problemi e del corrispondente contenuto, normalmente non è alla portata del docente.

Con frequenza, il discorso psicopedagogico ignora le complessità del contenuto dell'insegnamento, richiedendo al docente compiti che non sono alla sua portata, esigendo da lui che applichi alla sua pratica quotidiana analisi che richiederebbero un tempo e delle conoscenze teoriche che non sono a disposizione dei docenti. La ricerca didattica deve apportare soluzioni pratiche a questi problemi. L'elaborazione di testi per la formazione iniziale e in servizio dei docenti come quello descritto potrebbe costituire un contributo significativo a questo scopo.

Nota. *Lavoro realizzato nell'ambito dei progetti di ricercare EDU2012-31869 ed EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).*

Riferimenti bibliografici

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2[a] ed.). México: Trillas.

Batanero, C., Godino, J., & Navarro–Pelayo, V. (1997). Combinatorial reasoning and its assessment. In I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 239–252). Amsterdam: International Statistical Institute and I.O.S. Press.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*(2), 181–199.

Batanero, M. C., Godino, J. D., & Navarro-Pelayo, V. (1994). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis. Disponibile su http://www.sintesis.com/educacion-matematica-en-secundaria-70/razonamiento-combinatorio-ebook-1309.html

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Bruner, J. S. (1960). *The process of education.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

D'Amore, B. (1987). Motivazioni epistemologiche che stanno alla base delle scelte didattiche operate nelle attività educative in Italia dalla scuola dell'infanzia al biennio superiore. Actas del "II Congreso Internacional sobre investigación en la didáctica de las Ciencias y de la Matemática" (pp. 323–324). Valencia 1987.

D'Amore, B. (2004). Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, *18*(4), 4–30.

Dossey, J. A. (1992). The nature of mathematics: Its role and its influence. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 39–48). New York: Macmillan.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. Jones (Ed.), *Exploring probability in school. Challenges for* *teaching and learning* (pp. 121–141). New York: Springer.

Ernest, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics.* New York: SUNY.

Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: D. Reidel.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1)*,* 97–124.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. London: The Falmer Press.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.* Granada: Los Autores. Disponibile su http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/welcome.htm

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2) 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics, 60*(1), 3–36.

Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R., & Contreras, J. M. (2015). Articulación de la indagación y transmisión de conocimientos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Congreso Internacional Didáctica de la Matemática. Una mirada internacional empírica y teórica* (pp. 249–269), Universidad de la Sabana (Bogotá, Colombia).

Kapur, J. N. (1970). Combinatorial analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 3*(1)*,* 111–127.

Kenney, M. J., & Hirsch, C. R. (1991). *Discrete mathematics across the curriculum, K-12. 1991 Yearbook*. Reston (VA): N.C.T.M.

Ministerio de Educación y Ciencia, MEC (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Autor.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, MECD (2014). *Real Decreto 1105/2014 de currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

N.C.T.M. (1989). *Curriculum and evaluation standard for school mathematics*. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

N.C.T.M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1951). *La genèse de l'idée de hasard chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.

Sriraman, B., & English, L. (2010). Surveying theories and philosophies of mathematics education. In B. Sriraman & L. English, (Ed.), *Theories of mathematics education* (pp. 7– 32). Berlin: Springer.

Tymoczko, T. (Ed.) (1986). *New directions in the philosophy of mathematics.* Boston: Kirkhauser.

APPENDICE: Esempio di unità didattica inclusa in Batanero et al. (1994)

Regola del prodotto e diagrammi ad albero

1. Descrittori dell'unità didattica

ALLIEVI: Scuola primaria (10-11 anni).
OBIETTIVI: Si ipotizza che gli allievi:
- rinforzino l'acquisizione dei processi sistematici di enumerazione
- conoscano il diagramma ad albero per rappresentare situazioni di enumerazione
- scoprano la regola del prodotto, appoggiandosi sul diagramma ad albero, e la applichino per risolvere problemi di conteggio.

CONTENUTI:
Concetti e proprietà:
- regola del prodotto: numero di elementi del prodotto cartesiano di due o più insiemi.

Processi:
- sperimentazione con giochi manipolativi di enumerazione
- enumerazione degli elementi del prodotto cartesiano di due insiemi
- costruzione di un diagramma ad albero per rappresentare gli elementi del prodotto cartesiano
- interpretazione di diagrammi ad albero costruiti preventivamente
- calcolo del numero di configurazioni combinatorie applicando la regola del prodotto.

REQUISITI PREVI: Abilità basiche sui numeri naturali.
MATERIALI: Regoli incastrabili di diversi colori. Cartoncini per disegnare e ritagliare figure di animali diversi. Immagini ritagliabili di una bambola con varie gonne e camicette. Carte e colori.

2. Situazioni, problemi ed esercizi

SITUAZIONI INTRODUTTIVE

A. Il gioco delle torri

Si divide la classe in gruppi di 6 allievi, dando a ciascun gruppo una scatola con regoli incastrabili di diversi colori, per esempio blu e rosso.
Si propone loro di formare tutte le diverse possibili torri incastrando tre regoli. Per esempio, possono costruire una torre con tre regoli rossi, come appare nella Figura 1.

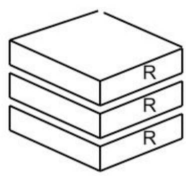


Figura 1

Vince il gruppo che per primo forma tutte le torri possibili. Una volta terminata l'attività, si possono porre le seguenti domande:
(1) Quante torri diverse si possono formare? Siete sicuri che non ne manca nessuna? Inventate un grafico (disegno o schema) che mostri il

metodo che avete seguito.
(2) Siete capaci di calcolare, senza però costruirle in realtà, quante torri diverse si possono costruire con 4 piani? Come avete fatto a fornire la risposta?
(3) Quante torri diverse di 3 piani si possono costruire con 4 colori diversi (blu, bianco, rosso e verde)?

B. L'albero genealogico
Si tratta di far sì che ciascun allievo costruisca o disegni il suo albergo genealogico fino a giungere al bisnonno o al trisavolo. Cominciamo con un quadretto nel quale l'allievo scrive i propri nome e cognome (Figura 2).

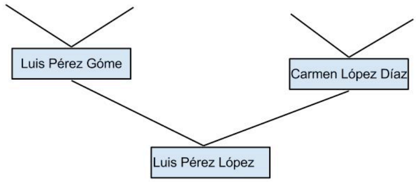


Figura 2

Successivamente si tracciano due segmenti che partono dalla cima in alto del quadretto verso l'alto e, negli estremi di ciascun segmento, si mettono altri due quadretti con i nomi e cognomi di mamma e papa (Figura 2). Per ciascuno di tali quadretti si ripete l'operazione, fin dove sia possibile ricordare. Si può chiedere aiuto ai genitori e ai nonni per costruire l'albero il più completo possibile. Relativamente a questa attività, si pongono le seguenti domande: guardando l'albero, potresti calcolare quanti bisavoli, trisavoli eccetera ha ciascun bambino?

SITUAZIONI COMPLEMENTARI

C. Modelli colorati
(1) Abbiamo una striscia di carta divisa in 5 quadratini contigui (fig. 3), ciascuno dei quali può essere lasciato in bianco o colorato. Colorando ciascun quadrato in tutti i modi possibili, quante strisce colorate in modo diverso si possono ottenere?
(2) Alcune delle strisce colorate sono simmetriche, in quanto al colore, come quella di Figura 3. Quante strisce colorate in modo simmetrico possiamo ottenere al massimo?


Figura 3

(3) Prendiamo adesso un quadrato. Tracciamo una diagonale (Figura 4) e coloriamo ogni regione di un colore diverso. Ruotando il quadrato iniziale di 90°, otteniamo i quadrati di Figura 5.

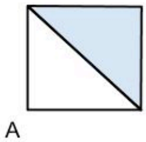


Figura 4

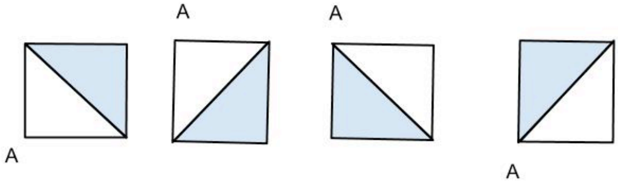


Figura 5

Se adesso incolliamo due di questi quadrati, il secondo alla destra del primo, quanti disegni diversi possiamo ottenere? Si possono semplicemente disegnare i vari rettangoli che si formeranno.
(4) E se li uniamo a 4 a 4 in modo contiguo verso destra, quante saranno le configurazioni diverse che si possono ottenere?

D. Prigionieri
(1) In una prigione ci sono 6 celle individuali. Scrivi tutte le forme in cui si possono distribuire 2 prigionieri in 2 celle. Aiutati con un grafico.
(2) Quante distribuzioni possibili si hanno se si devono collocare 4 prigionieri nelle 6 celle?

E. Esercizi e applicazioni
(1) *I vestiti della bambola*
Con una bambola reale o con un suo disegno e un numero dato di gonne e di camicette diverse, verificare in quanti modi diversi si può vestire la bambola. Si può usare un diagramma ad albero.

(2) *Semafori*
Si tratta di colorare tutti i modi diversi in cui può accendersi la luce di un semaforo (ha tre luci: rossa, gialla e verde). Supponiamo poi di avere un semaforo guasto nel quale possano accendersi simultaneamente tre, due, una o nessuna luce.

(3) *Animali immaginari*
Disegnare su ciascun cartoncino un animale, per esempio un cane, un maiale, una tigre e un leone. Ora si taglia ciascun cartoncino in due parti, in una parte la testa e nell'altra il resto del corpo. Formate tutti gli animali combinando teste e corpi diversi. Quanti animali risultato?

(4) *Numero di telefono*
Quanti numeri di telefono di quattro cifre si possono formare con le cifre da 0 a 9?

(5) *Codice segreto*

Pietro e Giovanni hanno creato un codice segreto. Per decifrare un messaggio devono cercare le lettere che lo compongono con l'aiuto della chiave data nel diagramma ad albero della Figura 6. Lo 0 indica che si deve seguire il ramo sinistro, l'1 indica che si deve seguire il ramo destro. Quando si arriva a una lettera si deve ricominciare dall'inizio dell'albero. Per esempio, il messaggio ADELA si scrive:

00001100101000

Decifra il seguente messaggio:
001000001001000.

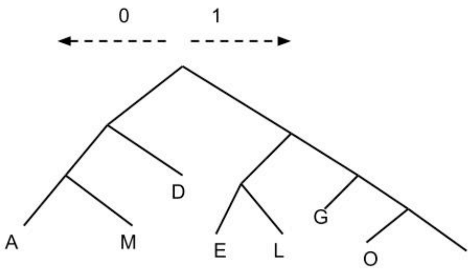


Figura 6

3. Analisi dei contenuti e gestione della classe

Il contenuto matematico atteso nelle situazioni di questa unità è la "regola del prodotto" espressa in casi semplici e in contesti manipolativi, e l'introduzione di una rappresentazione grafica importante nell'insegnamento della combinatoria che è il diagramma ad albero.

Il numero di pezzi delle torri della situazione A e dei colori degli stessi sono variabili di controllo della situazione che permettono di porre l'allievo di fronte alla necessità di generalizzare ricorsivamente le soluzioni trovate con valori maggiori.

Se, nel terminare lo sviluppo dell'attività A (gioco delle torri) o durante la stessa sorgessero delle difficoltà insuperabili, si introdurrà il diagramma ad albero come strumento utilizzabile in questa attività. Una spiegazione possibile potrebbe essere la seguente: "Disegniamo ora un diagramma per rappresentare le fasi necessarie per la costruzione della torre. Il diagramma ha la forma di un albero con una ramificazioni a ogni piano. Nella Figura 7 puoi vedere come abbiamo cominciato il diagramma. Completa ora il diagramma da solo".

Primo piano Secondo piano Terzo piano

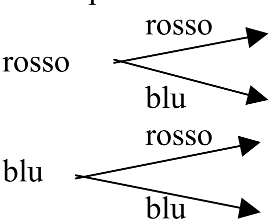


Figura 7

Il diagramma si può presentare anche usando materiali manipolativi (regoli incapsulabili eccetera).

Una volta che l'allievo abbia compreso la tecnica di costruzione del diagramma ad albero si può rendere esplicita la regola del prodotto per il calcolo del numero di elementi che si ottengono al formare tutte le coppie possibili a partire da due o più insiemi di elementi.

Si posso effettuare i giochi precedenti cambiando le regole e ponendo la condizione che gli elementi non si possono ripetere. Per esempio, si può chiedere: "Quanti torri diverse di 2 piani si possono fare con 3 colori senza mai ripeterne alcuno?".

Come criterio generale applicabile alle diverse unità didattiche, si deve suggerire all'allievo che tratti di risolvere i problemi con gli strumenti che ha a propria disposizione, Nel caso di questa unità, egli può trovare processi sistematici di calcolo e forme proprie di rappresentazione, mediante prova ed errore, Collettivamente si presenteranno e discuteranno le risoluzioni offerte dagli stessi allievi.

CONNESSIONI MATEMATICHE

La regola del prodotto è una nuova applicazione della moltiplicazione di numeri naturali che l'allievo già conosce. I problemi relativi alla regola del prodotto sono una categoria speciale all'interno dei problemi moltiplicativi. Di conseguenza, questa unità didattica può essere utilizzata nell'apprendimento della moltiplicazione già nei livelli scolastici anteriori.

I diagrammi ad albero avranno una grande utilità successivamente, nella combinatoria e in probabilità. Questo diagramma semplifica l'introduzione dell'idea di esperimento aleatorio composto e il calcolo delle probabilità di eventi composti, applicando la regola del prodotto nella probabilità. In tutta l'unità si usa in modo implicito il prodotto cartesiano di insiemi, in modo che queste situazioni potrebbero essere usate come elementi per introdurre questo contenuto matematico.

4. Risoluzioni delle situazioni, dei problemi e degli esercizi dell'unità didattica

(Si possono trovare in Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 2004, pp. 129-131).

[Traduzione di Bruno D'Amore]

Les portes sur l'univers. Sulla creatività matematica in Grothendieck

Fernando Zalamea
Universidad Nacional de Colombia

Abstract. *We present a synthetic vision of Les portes sur l'univers (1986), the appendix that Grothendieck wrote for Récoltes et semailles, where he studies the problematics of mathematical creativity, and we apply that vision (i) to the understanding of Grothendieck's own work around 1955, and (ii) to a dynamic reading of some correlations between creativity, academics and teaching.*

Keywords: Grothendieck, mathematics, philosophy, creativity, synthesis

Sunto. *Presentiamo una visione sintetica de Les Portes sur l'univers (1986), l'appendice che scrisse Grothendieck per Récoltes et semailles, nel quale studia la problematica della creatività matematica, e applichiamo questa visione (i) alla comprensione dell'opera stessa di Grothendieck attorno al 1955, e (ii) a una lettura dinamica di alcune correlazioni tra creatività, accademia e docenza.*

Parole chiave: Grothendieck, matematica, filosofia, creatività, sintesi

1. Introduzione

Usualmente l'accesso alla creatività matematica si presenta attraverso giochi concreti ed esempi curiosi, cercando di approfittare così del carattere ludico del gesto ed eccitare la curiosità del lettore. Procederemo qui, invece, da una prospettiva totalmente diversa –diremmo ortogonale– nella quale l'accesso alla creatività si realizza a partire da una *concettualizzazione generale* e da un'*analisi metodologica*, cercando di evidenziare così il carattere riflessivo del pensiero ed affinare la comprensione del lettore. Esistono vari testi di grandi matematici in questa direzione (*L'invenzione matematica*, un capitolo di *Scienza e Metodo*, 1908, di Poincaré è una delle vette più alte del genere); ma l'opera *Le porte sull'universo* (1986) di Grothendieck merita di essere posta senza dubbio in una posizione di rilievo.

In questo articolo ci addentreremo in questo universo affascinante, che richiederebbe un trattato assai più vasto per poter trarre vantaggio dalla sua immensa ricchezza. Nel *Paragrafo 1* presentiamo gli aspetti fondamentali del testo, e riassumiamo alcune delle riflessioni di Grothendieck sui processi creativi in generale e matematici in particolare. Nel *Paragrafo 2* applichiamo quanto appreso per addentrarci nei processi creativi dello stesso Grothendieck, attorno al 1955, anno del suo "passaggio" verso la geometria algebrica. Nel

Paragrafo 3 approfitteremo delle indicazioni contenute nel documento per effettuare speculazioni su una relazione viva e dinamica fra creatività, accademia e docenza. E infine, in un'Appendice proponiamo un riassunto ristretto ma sufficientemente preciso de *Les portes sur l'univers* per un suo eventuale uso in altri contesti che permettano di far avanzare una filosofia non riduzionista della matematica.

2. *Les portes sur l'univers*

Dopo un risorgere appassionato dei suoi interessi matematici fra il 1981 e il 1984 (*La longue marche à travers la théorie de Galois*, *Pursuing Stacks*, *Esquisse d'un programme*, nei quali pone le basi di temi assolutamente profondi e nuovi come la geometria anabeliana, la strutturazione categorica della teoria di Teichmüller, i disegni di bambini e la topologia moderata), Grothendieck realizza fra il 1985 e il 1986 il suo non certo comune trattato di riflessione sulla matematica (pensiero, invenzione, comunità) nel suo diario *Récoltes et semailles* (*Raccolte e semine*) (Grothendieck, 1985-86). Si tratta di un lavoro notevole, tanto in quantità (1252 pagine) come in qualità (un'analisi assai incisiva all'interno delle fonti dell'immaginazione matematica), del quale i lettori successivi hanno posto in evidenza sfortunatamente solo gli aspetti aneddotici della sua diatriba contro la comunità matematica, ma nel quale la capacità introspettiva di Grothendieck raggiunge alcuni dei suo momenti migliori nel mettere in evidenza la sua analisi della creatività. In particolare, l'appendice a *Récoltes et semailles, Les portes sur l'univers* (che indicheremo con PU d'ora in avanti nelle citazioni), 127 pagine scritte fra il 17 di marzo e il 14 di aprile del 1986, costituisce un favoloso documento sulle tensioni complesse del pensiero in generale e matematico in particolare.

Grothendieck – vicino da sempre alla filosofia orientale, praticante yoga fin dalla sua rinuncia al IHES (Institut des Hautes Études Scientifiques, Parigi) (1970) e dai suoi anni di ecologista radicale nel movimento *Survivre et vivre* (1970-75) – adotta in *Les portes sur l'univers* un sofisticato sistema di ramificazioni di coppie *yin/yang* per addentrarsi nello studio dell'azione umana e, in modo speciale, della matematica. Nel lato *yin* si trovano i processi di scoperta, la leggerezza, il linguaggio madre dell'intuizione. Nel lato *yang* appaiono i canali dell'invenzione, l'architettonica, i linguaggi superficiali della descrizione. Nel *yin* giace il cuore, nel *yang* risiede la ragione [nella nostra lettura vale la pena notare la dualità piena, valida solo in castigliano: *co-razón* (cuore) – *razón* (ragione); in questa lingua si esprime infatti la tensione sensibile – intellegibile mediante l'*esatto* prefisso duale "co"]. Grothendieck continua a costruire una combinatoria stratificata di legami parziali di coppie *yin/yang*, nelle quali appaiono ad un primo livello "poligamie" (uno *yang* connesso con due *yin*, per esempio, sole con luna e terra) e "poliandrie" (un *yin* intrecciato con due *yang*, per esempio terra con sole e cielo) [PU 7-8]. A un secondo livello, si realizzano diagrammi a zig zag, dove si sovrappongono e cambiano di prospettiva gli *apparenti* opposti [PU 8-10]. I legami variabili *yin/yang* possono dar luogo dunque a "cicli chiusi" nei quali un ciclo *yin/yang* ci permette di vedere con nuove prospettive una situazione data [PU 12]:

> Il fiume si getta nel mare che lo accoglie. La barca si immerge nel fiume che lo circonda e che lo avvolge. L'equipaggio è portato dalla barca che l'avvolge e lo protegge. Il giovane mozzo è membro e parte dell'equipaggio che lo include. E nei suoi occhi si riflette il mare, e attraverso i suoi occhi il mare penetra nella sua anima, che lo accoglie in sé. Così il maschile e il femminile –Eros e la Madre – si intrecciano costantemente in un ciclo senza fine nel quale ogni cosa, contemporaneamente o successivamente, vive il suo impulso virile e la sua pulsione materna.

Il mare e il mozzo ci ricordano la caduta di Pip negli abissi (sappiamo da una testimonianza di John Tate che *Moby Dick* era il racconto favorito di Grothendieck), frammento della problematica tipicamente romantico/matematica sui riflessi del Tutto sulla parte. Di fatto, l'iterazione e la riflessione (codificate nel ciclo anteriore, e disegnate in Figura 1) sono tipiche dei processi inventivi in matematica, come vedremo in dettaglio nel *Paragrafo 2*.

(*a*) (*b*)

Figura 1. Diagramma a zig zag di "cose poligame e poliandriche" [PU 8] (a) e ciclo yin/yang [PU 12] (b).

Uno dei maggiori interessi de *Les portes sur l'univers* consiste in come Grothendieck applica *implicitamente* alle sue analisi molte delle grandi metodologie della sua opera matematica (fasci, schemi, omologie, geometrie, combinatorie). Effettivamente, molti dei temi trattati nel suo testo fanno riferimento a incollature, inversioni, estratti, pause, soglie: *(i)* variazioni, gradi, intensità, fra il caldo (*yin*) e il freddo (*yang*) [PU 16–17]; *(ii)* inversioni, associate per sottogruppi, fra contenente e contenuto, astrazione (*yang*) e concrezione (*yin*) [PU 19–20]; *(iii)* dialettica molteplicità/unità ("Io stesso mi sento come un multiplo alla ricerca dell'unità") [PU 23]; *(iv)* diagrammi (esagoni, icosaedri, alberi) per catturare le tonalità (*yin*/*yang*) [PU 28–32]; *(v)* dinamiche fra l'ideale (*yang*) e il reale (*yin*) [PU 36–37]; *(vi)* iterazioni di zig zag e omologie fra unità/mistero (*yin*) e ordine/semplicità (*yang*) [PU 37–40]; *(vii)* tensione fra scoperta (*yin*) e invenzione (*yang*); *(viii)* fisarmonica fra esterno (superficie, luce, *yang*) e interno (profondità, ombra, *yin*) [PU 51–55]; etc. Per quanto l'essenziale in questa costruzione di "maglia ogni volta più stretta, di strutture più e più fini" [PU 64], per aiutare ad apprendere il mondo, sorge nel *processo* stesso delle *mediazioni*, è notevole che gli aspetti *yin* risultino essere i più interessanti dal punto di vista creativo. Di fatto, Grothendieck considera sempre la sua componente *yin* – ingenua, infantile, femminile – come il costituente essenziale della ricchezza della sua opera.

"Lo spirito, lanciato all'inseguimento dell'elusiva carne delle cose, va come un Ahab dietro la Balena Bianca" [PU 66]: per questo bisogna saper *dimenticare* e *ascoltare* come bambini [PU 71–72], bisogna avvicinarsi a una *lingua-madre* di emozioni e dolori, a una *lingua-immagini* di fantasticheria e immaginazione, che si apra a una "libertà creativa infinita" [PU 83–89]. L'incessante ricerca in Grothendieck di *archetipi matematici* (diseguaglianza di Grothendieck, gruppo della *K*-teoria, topos classificatori, gruppo di Galois assoluto, omotopia universale etc.) si riflette in questa allusione a *Moby Dick*, espressione letteraria per eccellenza dell'interminabile ricerca di quegli strati metafisi che ci superano. Cosciente del fatto che uno dei compiti essenziali della matematica consiste nel *rendere visibile l'invisibile* (coincidendo una volta più con la filosofia romantica, si pensi allo *Schema generale* di Novalis, 1799), Grothendieck traccia in *Les portes sur l'univers* un delicato reticolo di mediazioni fra il cuore profondo dell'immaginazione matematica e i diversi supporti razionali dell'edificio.

L'immaginazione visuale del grande matematico propone un grazioso anello di relazioni *yin*/*yang* [PU 46] e si scioglie soprattutto nella sezione finale del testo (si veda la nostra *Appendice* per una descrizione più precisa di tutto il documento). Qui, Grothendieck propone ventinove gruppi affini (o "porte") di coppie *yin*/*yang*, sintetizzati in armature diverse (fiori [PU 98, 105], albero [PU 110], finestra [PU 114], bi-icosaedro [PU 126], si veda la Figura 2). L'emozione (*yin*) e il pensiero (*yang*) si respingono e si attirano l'un l'altro, tanto nei distinti versanti dell'albero, quanto nelle soglie e aperture che danno luogo a una finestra "sull'universo".

Lungo tutto il documento, Grothendieck cerca di esplicitare inversioni e simmetrie (*connessioni tipo Galois*), così come distribuzioni e moltiplicazioni (*ramificazioni tipo Riemann*). Poiché un approccio ragionevole per capire Grothendieck è quello di intenderlo come *unificatore profondo di Galois e Riemann* [identità conseguita nelle sue tre linee visionarie della conferenza di Edimburgo: "La coomologia di Weil deve essere definita per mezzo di (…) connessioni fra coomologie di fasci e coomologie di gruppi di Galois, da una parte, e classificazione di ricoprimenti non ramificati di una varietà, dall'altra parte", germe della topologia étale (Grothendieck, 1958, 104)], risulta di sommo interesse notare che *Les portes sur l'univers* anticipa anche questo programma di unificazione, a livello di apporti metodologici. La riflessione di Grothendieck coincide così con le forze più significative della sua opera matematica, alla ricerca ("come un Ahab dietro la Balena Bianca") di una elusiva armonia universale.

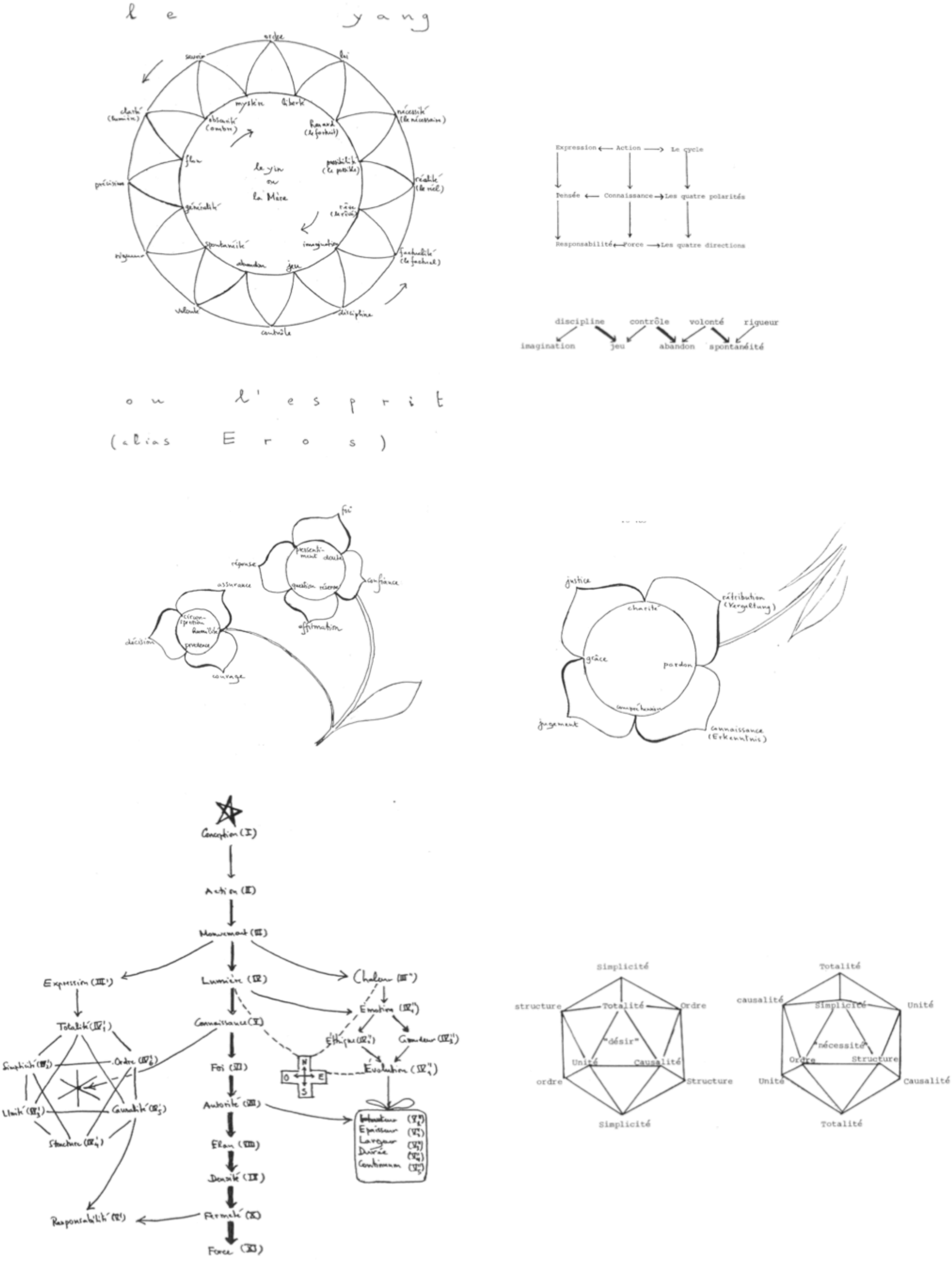


Figura 2. Figure principali de *Les portes sur l'univers*: [PU 46, 114, 100; 98, 105; 110, 126] da sinistra a destra, dall'alto in basso.

3. Grothendieck attorno al 1955: uno studio di caso

Il 1955 è l'anno cruciale che Grothendieck definì come il momento del suo "passo dall''analisi' alla 'geometria'" (Grothendieck, 1985-86, Parte 0, 26), che avrebbe prodotto, negli anni sessanta, i suoi monumenti di rinnovamento della geometria algebrica. Dall'analisi della creatività presente in *Les portes de l'univers*, ci concentreremo brevemente in questo paragrafo sulle espressioni fondamentali di questo cambio, rintracciabili in tre lavori eccezionali situati attorno al 1955: (1) *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques* (scritto nel 1953, pubblicato a Sao Paulo nel 1956) (Grothendieck, 1956), d'ora in avanti denominato "*Resumé*"; (2) *Sur quelques points d'algèbre homologique* (scritto nel 1955, pubblicato sulla rivista *Tôhoku* nel 1957) (Grothendieck, 1957a), d'ora in poi denominato "*Tôhoku*"; (3) *Rapport Riemann-Roch* (scritto nel 1957, pubblicato come: Borel, Serre, 1958) (Grothendieck 1957b), d'ora in poi denominato "*Rapport*".

Situamoci nei due seguenti *diagrammi a zig zag* di "cose poligame e poliandriche" nelle quali, come sempre succede in *Les portes sur l'univers*, le sfumature *yang* si trovano nella linea superiore e si proiettano nelle sfumature *yin* della linea inferiore (Figura 3).

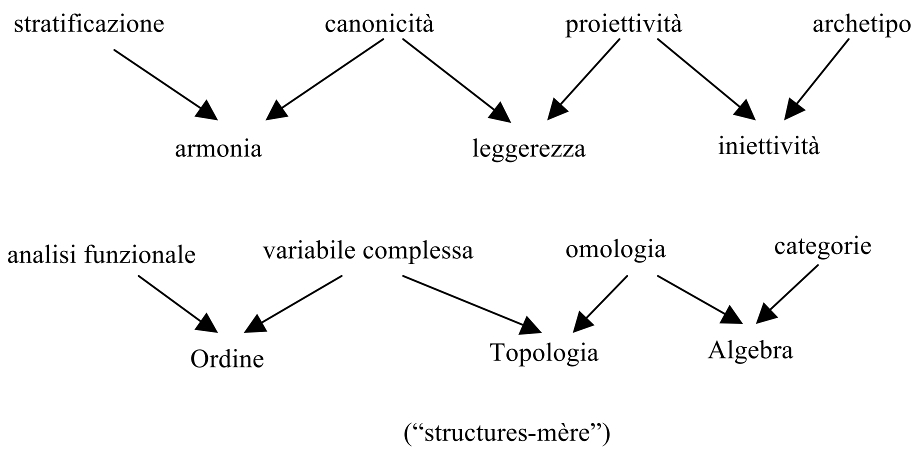


Figura 3. Alcuni temi yin-yang nel *Resumé*, nel *Tôhoku* e nel *Rapport*.

Il *Résumé* merita di essere visto come una delle più straordinarie espressioni dello *spirito unitario* di Bourbaki, nel quale si congiungono in maniera stupefacente le tre "strutture madri" proposte per il gruppo: Ordine, Topologia, Algebra. In effetti, quando Grothendieck scrive il suo *Résumé* a Sao Paolo, un solo semestre dopo aver difeso il suo dottorato, esplodono alcune delle idee generali della tesi (Grothendieck, 1955), dando luogo a una visione nuova delle *proprietà strutturali delle classi* (ancora non chiamate "categorie") di spazi di Banach e di Hilbert, sotto una *tripla prospettiva*, attenta a disuguaglianze fra norme tensoriali, strutture analitiche e fattorizzazioni algebriche. Grothendieck propone di esplorare *tutte* le norme "ragionevoli" (cioè per le quali le forme bilineari canoniche posseggono norma minore di 1) su prodotti tensoriali di spazi di Banach (Grothendieck, 1956, p. 8). La strategia è affascinante: *(i)* trovare norme canoniche comparabili, *(ii)* trasformare queste norme, *(iii)* fornire un panorama completo grazie a gerarchizzazioni strutturali. I tre livelli generali posseggono a loro volta sottolivelli specifici di comprensione: (A) alla maniera di Bourbaki abbiamo *(i)* ordine, *(ii)* topologia, *(iii)* algebra; (B) dal punto di vista semiotico abbiamo *(i)* semantica, *(ii)* sintassi, *(iii)* pragmatica; (C) dal punto di vista fenomenologico abbiamo *(i)* continuità, *(ii)* separazione, *(iii)* relazioni (Merleau-Ponty, 1964/2004a, 1964/2004b); (D) dal punto di vista musicale – qualcosa di essenziale per Grothendieck, che fu in dubbio (!) fra essere matematico o musicista – abbiamo *(i)* tema, *(ii)* variazioni, *(iii)* fuga. Si osservi che queste terne di aspetti corrispondono a *triangolazioni* in cui i diagrammi piani della Figura 3 sembrano coprire omologicamente due specie di "tori" nello spazio, ottenuti nell'annodare, in un *ciclo* di dimensione 3, gli estremi dei due diagrammi a zig zag.

Dalla sua tesi dottorale fino alla sua dimostrazione di Riemann-Roch generalizzato (cioè nell'intervallo di 4 anni che ha centro in quel 1955 che abbiamo scelto di analizzare in questo *Paragrafo*), Grothendieck individuò *proiettività e iniettività ovunque*: prodotti proiettivi e iniettivi (*Tesi*); norme proiettive e iniettive (*Résumé*); esistenza di sufficienti iniettivi in categorie abeliane con un generatore e assiomi di infinitezza, per poter ricostruire la coomologia a partire da funtori derivati (*Tôhoku*); sottospecializzazioni induttive della dimostrazione generalizzata di Riemann-Roch nei casi proiettivo e iniettivo (*Rapport*).

Proiettività e iniettività sono di fatto specializzazioni (spazializzazioni) di un punto di vista più ampio che risulterà essere centrale nel secondo periodo di Grothendieck (1958-1970), punto di vista con il quale cercherà di trovare *archetipi* profondi del sapere matematico. Molteplicità, diversità, *tipi* devono intendersi come *proiettati* dagli *archetipi* o, dualmente, *iniettati* in essi (si veda il primo diagramma a zig zag della Figura 3).

D'altra parte, gli andirivieni fra proiettività e iniettività nascondono un tema ancora più profondo di ricerche di *armonia e attenuazione*, a partire da strategie di *stratificazione e canonicità* (vedere di nuovo la Figura 3). In questo senso, I lineamenti del *Rapport* sono molto significativi. I temi della estensione di Riemann-Roch-Serre-Hirzebruch che propone Grothendieck possono essere riassunti in tre aspetti centrali: (1) *linearizzazione*: messa in evidenza della K-teoria mediante il gruppo $K(X)$ su una varietà (gruppo libero dei fasci coerenti su X); (2) *naturalizzazione*: visione delle classi di Chern e di Todd come trasformazioni "proiettive" di K su H^* (e ricostruzione della coomologia dall'*archetipo* "superiore" della K-teoria); (3) *relativizzazione*:

estensione dei risultati Serre-Hirzebruch al caso di un morfismo $f:X\rightarrow Y$ (variazione). La trasformazione naturale non commutativa fra $K(X)\rightarrow K(Y)$ e $H^*(X)\rightarrow H^*(Y)$, che deve essere adeguata mediante i controlli della *deviazione* delle classi di Todd, esprime in modo strutturale la formula di Riemann-Roch. La *stratificazione*, la *naturalizzazione*, l'*attenuazione* – tipiche dei modi d'operare di Grothendieck – permettono di ricostruire così i *tipi di spazio* (generi geometrici) e i *tipi di numero* (dimesioni algebriche) come parentele particolari che si proiettano dall'*archetipo* generale di *adattamento/disadattamento nel non commutativo*.

Il *Tôhoku* conta, da parte sua, con numerose concrezioni dei diagrammi a zig zag della Figura 3. Come avverte Grothendieck all'inizio del *Tôhoku*, l'articolo cerca di esplicitare un "quadro comune" che permetta di sostenerere l' "analogia formale" (Grothendieck, 1957a, p. 119) fra la coomologia a coefficienti in un fascio e la serie di funtori derivati da funtori di moduli. Il lavoro, iniziato nel soggiorno in Kansas nel 1955, si inserisce nel momento stesso in cui la nozione di fascio – *struttura armonica di attenuazione* nello studio dei transiti e ostruzioni fra il locale e il globale – entra a far parte irrinunciabile della ricerca matematica. Grothendieck procede nell'*inventare* (*yang*) il linguaggio (categorie addittive e abeliane) e a *scoprire* (*yin*) la ricchezza delle strutture matematiche (fasci, oggetti iniettivi, attraverso prodotti e somme infinite, azioni di gruppo) che spiegano l' "analogia formale" iniziale. In particolare, le azioni dei gruppi in gioco si *stratificano* in una precisa gerarchia di livelli-azione su uno spazio (primo) X, azione sopra un fascio (secondo) O di anelli su X, azione su un fascio (terzo) di moduli su O- concretizzando così una delle forme tipiche del processo grothendickiano. La copertura proiettiva dà luogo dunque alle diverse parti dell'articolo: (I) categorie abeliane (*linguaggio*); (II) algebra omologica in categorie abeliane e (III) coomologia con coefficienti su un fascio (*strutture*); (IV) calcolo di *Ext* per fasci di moduli e (V) coomologie con spazi di operatori (*trasferimenti* e *azioni*).

Da un punto di vista metodologico e filosofico, il *Tôhoku* produce cambi definitivi: (1) comprendere un oggetto attraverso la *categoria intera* dei suoi oggetti equivalenti, (2) intendere il concreto (coomologia, iniettivi) come ciò che è proiettato da *categorie astratte assiomatiche* (assiomi AB3-AB6, generatore, funtori iterati), (3) caratterizzare i processi di esistenza (*tipi* associati al quantificatore esistenziale $\exists$, *archetipi* associati al quantificatore esiste uno ed uno solo $\exists!$) e *invertire* le sue qualità "metafisiche" (tipi statici, archetipi dinamici, il che porta a un completo rinnovamento del logoro "platonismo" matematico – inversioni tipiche de *Les portes sur l'univers* applicate al primo diagramma della Figura 3). Il "quadro comune" che emerge dal *Tôhoku*, costruito per permettere lo studio di *legami naturali* (vedere la prima riga del secondo diagramma della Figura 3) fra la geometria algebrica, la topologia, la variabile complessa, i calcoli coomologici, modifica il panorama della matematica. Nel mettere a fuoco i suoi sforzi su un concetto/oggetto matematico *perno* (il fascio matematico), al definire gli intorni generali nei quali i fasci possono essere studiati nella loro unità/moltiplicità (le categorie abeliane) e al porre tutto questo istrumentario al servizio della comprensione delle forme profonde delle strutture (le coomologie), Grothendieck produce di fatto non solo una "rivoluzione copernicana" ma una vera "rivoluzione einsteniana" (l'intendere la *matematica relativa* e i suoi *invarianti*), se ci è permesso forzare un po' la metafora.

4. Una relazione plastica fra creatività, accademia e docenza

L'esercizio che abbiamo realizzato nel *Paragrafo 2* indica come le prospettive de *Les portes sur l'univers* aiutano ad abbattere e reintegrare la "abracadabrante" molteplicità della *tecnica matematica* grothendickiana. In realtà, come sempre succede con Grothendieck, i temi in gioco eccedono la finezza locale delle teorematiche e si aprono ad un'immensa ricchezza globale, dove la *leggerezza* e la *naturalità* degli ambienti aiutano a superare i muri artificiali della comprensione. In questo *Paragrafo* approfitteremo della *plasticità* dello spirito grothendickiano, e alcune piste de *Les portes sur l'univers*, per tratteggiare brevi riflessioni sulla *necessità* di una relazione che si divide in tre componenti fra *(i)* una dinamica emergente (*yin*) di impulsi creativi, *(ii)* la stabilità architettonica accademica (*yang*) di questi impulsi, *(iii)* l'adeguata trasmissione docente di questa tensione fra pulsione sensibile e comprensione intellegibile.

Grothendieck pensò sempre a molteplicità che avrebbero, nella misura del possible, cercato di vedersi come unità [si ricordi la sua percezione di sé stesso: "Mi sento io stesso come un multiplo alla ricerca dell'unità" (PU 23)]. Questo risulta essere il senso essenziale della teoria delle categorie: le diverse regioni della matematica si reintegrano grazie a definizioni "universali" (usi sistematici del quantificatore $\exists!$), dove la diversità relazionale (morfismi) si proietta dall'unità. Uno degli interessi di questa visione consiste nell'apprendere a saltare muri ("Saltare a piedi giunti sopra i calcoli", diceva Galois) e, così, *superare le apparenze* (per esempio, oggetti tanto diversi come l'insieme vuoto, un gruppo unitario, un minimo in un insieme ordinato, o l'anello degli interi, possono essere visti tutti come istanziazioni di uno stesso concetto astratto: l'oggetto iniziale di una categoria, per il quale solamente *esiste un unico* morfismo per qualsiasi altro oggetto della categoria). L'idea è talmente semplice quanto profonda: le ostruzioni nel *particolare* si superano nell'innalzarsi a un livello di transito *generale* più alto, dal quale quel che appariva come un blocco si vede ora come una connessione. *L'invisibile si trasforma in visibile*. Da un punto di vista metodologico, si tratta di una concezione profondamente *pragmatica* del sapere, che celebra la ricchezza *differenziale* di ciascun contesto ma che, inoltre, seguendo la massima pragmatica di Peirce (rifondatore moderno tanto del pragmatismo, quanto della semiotica) permette spesso di *reintegrare* i differenziali all'interno di una visione globale più ampia, non riduzionista, non settaria, non ristretta unicamente al locale [per uno studio tecnico preciso dei legami fra la teoria delle categorie e il pragmatismo di Peirce, si veda Zalamea (2008, 2010)].

La pluralità richiede *plasticità* e, in particolare, la *rete plurale* degli alti e bassi fra immaginazione, ragione e contrasto (in accordo con Peirce (1) abduzione, (3) deduzione e (2) induzione – gli indici numerali invertiti si riferiscono alle "categorie cenopitagoriche" di Peirce) richiede un'importante *apertura mentale*. Per fortuna, tanto la matematica in sé, quanto la molteplicità degli sguardi a essa diretti (storia, filosofia, docenza etc.), riflettono spesso questa apertura mentale. Bruno D'Amore ha ripetutamente insistito sulla ricchezza della *commistione*: la didattica come "*ars*" è allo stesso tempo *arte* e *artigianato* (D'Amore, 2005, p. 11), la sensibilità "artistica" e la motivazione singolare del maestro sono importanti, però solo se si capiscono l'ambiente "artigianale" di creazione *comunitaria* che le uniscono. La rete, l'artigianato, la comunione pragmatica sono fondamentali per la *vita sana* della matematica, come sapeva perfettamente Grothendieck, lo studioso della teoria delle categorie, il pensatore delle stratificazioni complesse del *yin*/*yang*, il maestro dedito, l'ecologista appassionato. Esiste di fatto una tradizione profondamente umana nella matematica, che converte la disciplina a un frammento delle umanità e che Cavaillès citava nel *calembour* che definisce la matematica come "scienza storica per eccellenza". D'Amore rilegge e reinventa magnificamente questa tradizione nel suo *Dante*, facendoci *sentire* come il "terribile infinito" incarna nel conteggio incessante dei numeri naturali fatto da Manlio e dai suoi eredi di generazione in generazione (D'Amore, 2011, pp. 45–46), e nel farci *vedere* come l'astrazione (infinità matematica) si intreccia indissolubilmente con il conglomerato umano (generazioni di esseri recitanti).

In realtà, procediamo nel fondo di Novalis, il giovanissimo e geniale poeta, ma, soprattutto, il più brillante pensatore della modernità (Novalis, 1799, 1993). Sulla base delle opposizioni inevitabili dell'esperienza, una dialettica superiore permette a Novalis di reintegrare le differenze e, in vari punti dello *Schema Generale* (Novalis, 1799), si giunge a parlare della filosofia come un *calcolo differenziale e integrale astratto*. Novalis esplicita alcune delle aporie fondatrici del sapere: "Antinomia dell'intenzione, o del progetto – e del risultato – o del processo. Antinomia del concetto – e dell'ogetto. Antinomia della dimostrazione – della risoluzione etc." (Novalis, 1993, vol. II, p. 403). Il suo idiosintratico *lungo copione*, onnipresente in tutte le sue riflessioni, evoca una *linea* di unione fra gli opposti. Il fine (risultato, oggetto, soluzione) e il mezzo (processo, concetto, dimostrazione) si contrappongono, per quanto a volte si richiamino l'un l'altro e si uniscano nel lungo copione, *ponte* *sull'abisso* e simbolo di una sintesi nello spazio-tempo. L'unità si esprime in un "*appetitus sensitivus e rationalis*" che desidera "*tutto e subito*" e che si proclama "opposto al principio di contraddizione" (Novalis, 1993, vol. II, p. 448). A partire da un incollamento dei contrari, Novalis mostra come le rappresentazioni dell'*immaginazione creativa si tri*-compone di ragione, giudizio e sensibilità. Sorge così una "*forma poetica del mondo*" che rompe con i compartimenti stagni e che affronta sistematicamente le *osmosi* della conoscenza. L' "Essere limitati e illimitati allo stesso tempo" e "Essere legati, in modo infinito, con il transmondano" (Novalis, 1993, vol. II, p. 449) formano parte di una *condizione aperta* che spinge ed esalta l'azione dell'essere umano.

Non altro è stato il programma di Grothendieck, convertito in una favolosa esplosione di nuovi "enti" matematici [ben a ragione, Grothendieck si sentiva orgoglioso di aver introdotto più di un *migliaio* (!) di nuove definizioni matematiche – qualcosa di quasi inimmaginabile, quando un normale matematico può sentirsi forse contento di aver proposto *una* nuova definizione nella sua disciplina]. La rottura dei compartimenti stagni, il passaggio fra il possible e il dato, l'andirivieni fra variazione e invarianza, è uno dei grandi punti di forza della matematica. Quando la docenza si prende realmente sul serio, come ci hanno insegnato Bruno D'Amore e la sua scuola, tutta questa plasticità relativa alla creatività matematica – specialmente visibile in *Les portes sur l'univers* – deve riflettersi nel gesto *comunitario* del maestro. Dobbiamo pertanto superare i nostri limiti intrinseci, abbozzarci come frammenti di una comunità, *aprire le porte dell'universo* e realmente *vivere* la molteplicità del pensiero umano, magnificamente indicizzato nella varietà del pensiero matematico.

Rigraziamenti

A Bruno D'Amore: (1) per i suoi insegnamenti, per il suo esempio, per la sua visione di un mondo amplio nel quale l'intelligenza non può essere sezionata, (2) per la sua generosa e attenta traduzione di questo testo all'italiano.

Riferimenti bibliografici

Borel, A., & Serre, J.-P. (1958). Le théorème de Riemann-Roch (d'après des résultats inédits de A. Grothendieck). *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *86*, 97–136.

D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Barcelona/Bogotá: Reverté.

D'Amore, B. (2011). *Dante e la matematica*. Firenze: Giunti.

Grothendieck, A. (1955). *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*. American Mathematical Society Memoirs, *16*, 1955 (Thèse Doctorale, Nancy, 1953).

Grothendieck, A. (1956). Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques. *Bol. Soc. Mat. Sao Paulo*, *8*, 1–79.

Grothendieck, A. (1957a). Sur quelques points d'algèbre homologique. *Tôhoku Math. Journal*, *9*, 119–221.

Grothendieck, A. (1957b). Classes de faisceaux et théorème de Riemann-Roch. *SGA*, *6*, 20–71.

Grothendieck, A. (1958). The cohomology theory of abstract algebraic varieties. *Proceedings International Congress of Mathematics Edinburgh 1958* (pp. 103–118). Cambridge: Cambridge University Press, 1960.

Grothendieck, A. (1985-86). *Récoltes et Semailles*. Montpellier.

Merleau-Ponty, M. (2004a). *L'Oeil et l'Esprit*. Paris: Gallimard. (Originariamente pubblicato nel 1964).

Merleau-Ponty, M. (2004b). *Le visible et l'invisible*. Paris: Gallimard. (Originariamente pubblicato nel 1964).

Novalis (1799). *La Enciclopedia*. Caracas/Madrid: Fundamentos, 1976.

Novalis (1993). *Opera Filosofica*. Torino: Einaudi.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía sintética de las matemáticas contemporáneas*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia. (*Synthetic Philosophy of Contemporary Mathematics*. New York: Sequence/Urbanomic, 2012).

Zalamea, F. (2010). A category-theoretic reading of Peirce's system: Pragmaticism, continuity, and existential graphs. In M. Moore (Ed.), *New Essays on Peirce's Mathematical Philosophy* (pp. 203–233). Chicago: Open Court.

APPENDICE: Un riassunto de *Les portes sur l'univers*

In quel che segue, i riferimenti numerici fra parentesi corrispondono alle pagine del manoscritto [PU] (*Les portes sur l’univers*) (1986) – Appendice di *Récoltes et semailles* (Grothendieck, 1985-86).

Sezione 1 (1-7). Le roc et les sables. Inizi 1979, visione 1984, realizzazione finale Marzo/Aprile 1986. Coppie *yin-yang*, grafi di coppie (“combinatoria o topologia”) (1-2). Universalità, realtà (3-4). Tagli e piegamenti, tipografia e topografia, legami medi e struttura globale (“albero di Natale” e varianti) (5-6).

Sezione 2 (7-9). Choses polyandres et choses polygames. Coppie archetipiche legate a nomi (7). Poligamia (uno *yang* legato a due *yin*, figlio con madre e vecchio – sole con luna e terra) e poliandria (uno *yin* legato a due *yang*, madre con padre e figlio – terra con sole e cielo) (7-8). Diagramma a zig zag: potenza/energia/materia/spirito/corpo (8).

Sezione 3 (9-12). L’ambiguité créatrice (1): paires, rimbambelles et rondes. Ambiguità del *yin* e dello *yang*: sovrapposizioni, cambi di prospettiva (9-10). Code (11) e giri rotondi (12): collegamenti variabili di *yin/yang*. Un anello poetico nell’*Elogio dell’Incesto*: apprendista-equipaggio-nave-fiume-mare-apprendista (“nei cui occhi si riflette il mare e penetra nella sua anima”) (12).

Sezione 4 (13-15). L’ambiguité créatrice (2): le renversement des rôles. Coppie *yin/yang*: “cosmiche” o “universali” (essenziali) versus “occasionali” (ambiguità non essenziali) (13). Cartografia metodica (13). Inversioni nel *yin/yang*: momenti di creatività (14). Dominanze e tonalità (14). “L’immagine della Madre (...) l’incarnazione più completa e profonda del *yin*” (15).

Sezione 5 (15-16). L’ambiguité créatrice (3): la partie contient le Tout. Coppia: parte (*yang*) / Tutto (*yin*) (16). Processo di riflessione: “molto spesso, la *parte* riflette il *Tutto*, e pertanto lo contiene, così come è contenuta in esso” (16). Esempi di riflessione: uomo, corpo, volto, voce, mano – sostegno di tecniche divinatorie (16).

Sezione 6 (16-18). L’ambiguité créatrice (4): les extrêmes se touchent. Coppia: caldo (*yang*) / freddo (*yin*) (16). Variazioni, gradi, intensità, inversione: il caldo estremo si converte in *yin*, il freddo estremo si converte in *yang*, “Gli estremi si toccano” (17). “Immagine ingénue” del cerchio per rappresentare i movimenti e le inversioni *yin/yang* (18).

Sezione 7 (18-21). Mes perplexités “contenant – contenu” et “le lourd – le léger”. Coppie delicate, non ben definite, paradossali etc. (19-20). Inversioni, associazioni per sottogruppi (19-20). Andirivieni fra contenente e contenuto (19), fra astratto e concreto (20). "Il gioco di analogie, guida preziosa e indispensabile (…) non è infallibile, richiede cautela e prudenza" (20).

Sezione 8 (21-23). La quête de l'unité. Correlazioni (non equivalenti) fra le coppie: particolare/generale, astratto/concreto (21). Importanza dei gradi di astrazione in matematica, legame permanente di particularità e generalità (22). Coppia basica: molteplicità/unità (23), "Mi sento io stesso come un multiplo alla ricerca dell'unità" (23).

Sezione 9 (23-27). Généralité et abstraction – ou le prix à payer. Nivelli e soglie di astrazione (24). Ricerca di generalità e unità ("immersione profonda", 25), per la quale c'è da pagare il prezzo dell'astrazione (unità - *yin* versus astrazione - *yang*) (25-26). Limiti della ricerca scientifica: separazione, esplosione, divergenza (27).

Sezione 10 (27-31). Histoires d'icosaèdres et d'arbres de Noël. Enumerazione di ricerche per arrivare a "una percezione *formale* o *matematica* globale dell'insieme di coppie *yang/yin*" (27). Desiderio di costruzioni "canoniche" e "naturali" (28). "È un peccato che Kepler non sia qui a leggermi" (30). Grafi, esagoni, icosaedri (28-29) e alberi di Natale (30).

Sezione 11 (31-34). Désir et nécessité – ou la voie, et la fin. Riflessioni notturne (23, 27, 31, 37, 41 etc.). Gruppi di coppie che favoriscono il pensiero: poli, attrattori, dinamica, tonalità *yin/yang* (31-32). Viavai essenziale tra sintesi e analisi, differenziazione e unità (33). Dopo la comprensione nell'ordine del Tutto, "i nostri *occhi* non sono più gli stessi" (34).

Sezione 12 (34-37). Précision et généralité – ou la surface des choses. Movimenti del pensiero: diagramma a zig zag fra termini *yang* (purezza, il particolare, il preciso, il chiaro, il conosciuto, sapere) e termini *yin* (fecondità, il generale, il vago, l'oscuro, il misterioro, conoscenza) (35-36). Dinamiche e inversioni (36), idealità e realtà (sogno, profondità) (37).

Sezione 13 (37-41). L'harmonie – ou les épousailles de l'ordre et du mystère. Iterazione del zig zag (omologie nascoste!) a sette qualità *yang* e otto *yin*, relazionate con un andirivieni progressivo, fra immaginazione e mistero (37). Legame fra unità e mistero (*yin*) / ordine e semplicità (*yang*), sotto un'armonia profonda di ombra e luce, attraverso lo stesso spirito umano (40).

Sezione 14 (41-46). Le caractériel et le caractéristique – ou l'Accordéon cosmique. Il Sognatore regala l'immagine (= "realtà tangibile", 42) della "fisarmonica" per rappresentare l'interminabile zig zag *yin/yang* (41). Più sogni (42). "Nuove note impreviste nel pensiero esploratore" (43). Estensione del zig zag e collegamento circolare (45): DISEGNO DELLA FISARMONICA COSMICA (46).

Sezione 15 (47-51). Découverte ou "invention"? – ou le scribe et "l'Autre". Invenzione o scoperta delle figure? (47). Scoperta matematica (47). Studio matematico delle figure: base di termini, grafi orientati (che portano all'icosaedro) (49), strutture affini (che portano alla fisarmonica/fiore) (50). Nascita creativa dal limbo, la mano dello scriba è guidata dall'Altro (51).

Sezione 16 (51-57). La Fleur et son mouvement – ou: plus je m'éloigne, plus je m'approche. Analisi della fisarmonica/fiore cosmico: petali, monti, valli, declivi (51-52). Interno del fiore (*yin*): parte feconda, granulare (55). Esterno del fiore (*yang*): spirito (55). Dinamica: dall'esterno (superficie, luce) all'interno (profondità, ombra) (55). Espansione di cammini: da fiori piatti a fiori sferici (56).

Sezione 17 (57-61). Chaos et liberté – ou les soeurs terribles. Sparizione del caos nel fiore cosmico (59): caos e libertà possono essere considerate "anti-attrattori" all'interno del sistema dinamico generale (59). Sospetti sulla libertà: carattere "necessario" della ricerca scientifica (59-60). "Orrore" del caos: è una "semplice apparenza" dietro la quale emerge un ordine (61).

Sezione 18 (62-64). Le vague et le précis – ou l'épuisette et la Mer. Attrattori *yang* subordinati a semplicità e ordine: astrazione, precisione, struttura (62). Andirivieni fra precisione e vaghezza, non riconoscimento e conoscenza, mistero e ordine (63). "Cosa folle (…) nulla appare di questo movimento" (63). Censura "implacabile" del "mare di nebbia senza fondo e senza limiti" (63-64).

Sezione 19 (64-65). Ordre et structure – ou l'esprit de précision. Comprensione di una sostanza attraverso "le reti ogni volta più strette, di strutture più e più fini che si *incollano* alla sostanza" (64). Ricerca di strutture: modalità privilegiata dello spirito di precisione (= "spirito di geometria" di Pascal) (64-65).

Sezione 20 (66-68). L'abstrait et le concret (1): naissance de la pensée. "Lo spirito, lanciato all'inseguimento dell'elusiva carne delle cose, va come un Ahab dietro la Balena Bianca" (66). Versus una paura dell'astrazione (ripugnanza a "cambiare di piano", 66), il linguaggio e l'atto di "nominare", paradigmi dell'astrazione, costituiscono l' "*atto archetipico* dello spirito" (67).

Sezione 21 (68-71). L'abstrait et le concret (2): le miracle de la simplicité.

Contro i pregiudizi comuni, l’astrazione è il mezzo per apprendere e chiarificare il semplice dentro il complesso (69). Essenziale ricchezza astrattiva dell’elisse sul cerchio (71). Correlazione inversa fra fondo (comprensione, livelli di profondità) e forma (espressione astratta, livelli di elevazione) (69).

Sezione 22 (71-78). L’abstrait et le concret (3): les strates du langage – ou la peau et l’étreinte. “L’ebrezza della scoperta non è privilegio del gigante (…) ma del bambino” (71). “*Dimenticare* (…) *ascoltare*”: chiave dell’invenzione (72). “La grandezza di Riemann” si deve a un pensiero vasto: matematico e filosofico, in grado di compiere astrazioni e ingenuo (74-75). Relatività e stratificazione della nozione di astrazione (76-77).

Sezione 23 (78-82). Abstraction et sens – ou le miracle de la communication. Il contrario dell’astrazione: sterilità di un gioco fatto per piacere (78). Pericolo di “*perdere contatto con il concreto*” (79). Senso: trasformazione e risonanza di “nubi” fra emittenti e riceventi (80-82). “La mia responsabilità (…) è di essere realmente presente e di essere *vero* in quel che faccio” (82).

Sezione 24 (83-92). La langue des images – ou le chemin de retour. Attraverso le parole e i linguaggi usuali, esiste una “lingua madre” di emozioni e dolori (83-84), una “lingua-immagini” di suoni e immaginazioni (85-86), di corpo e percezione (87), di danza evita (88), intima e personale (86), che si apre a una “libertà creativa infinita” (89) – guidata dal Sognatore (92).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l’univers. (A) (93-108). Portes et trous de serrure (répertoire). Ventinove gruppi affini (o “porte”) di coppie *yin*/*yang*. DISEGNO DI FIORI (a tre e quattro petali) legati al gruppo “Fede” (98). DISEGNO DI UN FIORE (a quattro petali) legato al gruppo “Responsabilità (o Karma)” (105).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l’univers. (B) (108-111). L’arbre. Lato destro (occhi sull’albero, sinistra sulla carta): *yang* – pensiero (nostra “ragione”) (109). Lato sinistro (occhi sull’albero, destra sulla carta): *yin* – emozione (nostro cuore, corazón, co/razón co/ragione) (109). DISEGNO DELL’ALBERO (110).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l’univers. (C) (111-114). La fenêtre. Derivazione di nove spiragli dentro l’abero: espressione, pensiero, responsabilità (111), quattro direzioni (111), quattro polarità (112), ciclo (113), azione, conoscenza, forza (113), inglobati tutti dentro un DISEGNO DI FINESTRA (omologia) sull’universo (114).

Sezione 25 (93-127). Les portes sur l’univers. (D) (114-127). Le bi-icosaèdre. “Coppia di due strutture di icosaedro sull’esagramma pensiero”: canonicità e complementarità *yin*/*yang* (114). DISEGNO DI STRUTTURA BI-ICOSAEDRICA per il pensiero-*yin* e il pensiero-*yang* (126).

[Traduzione di Bruno D’Amore]

Una formula per la misurazione oggettiva della difficoltà di comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti. Uso valutativo e uso didattico

Bruno D'Amore
Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"
Martha Isabel Fandiño Pinilla
NRD dell'Università di Bologna

Ricercatori partecipanti:
in Italia:
scuola primaria: Anna Angeli, Lorella Campolucci, Luigina Cottino, Erminia Dal Corso (con funzione di coordinatore), Margherita Francini, Claudia Gualandi, Giuliana Liverani, Antonella Marconi, Annarita Monaco (con funzione di coordinatore), Paola Nannicini, Laura Prosdocimi;
scuola secondaria: Gianni Callegarin, Irene Foresti, Maura Iori (con funzione di coordinatore);
tutti membri del RSDDM (Gruppo di Ricerca e Sperimentazione in Didattica e Divulgazione della Matematica) di Bologna;
in Colombia:
scuola secondaria: Angélica Molano Zárate e Clara Cecilia Rivera Escobar.

Abstract. *This article provides an objective formula for the empirical evaluation of the understanding of a mathematical text by students of any level of education. Of this formula we suggest an evaluative and educational use.*

Keywords: readability formula, formula of understanding, comprehension difficulties of a mathematical text, read mathematics, writing mathematics (TEP)

Sunto. *In questo articolo si fornisce una formula oggettiva per la valutazione empirica della comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti di qualsiasi livello scolastico. Di tale formula si suggerisce un uso valutativo e didattico.*

Parole chiave: formula di leggibilità, formula di comprensione, difficoltà di comprensione di un testo matematico, leggere di matematica, scrivere di matematica (TEP)

Resumen. *Este artículo proporciona una fórmula objetiva para la evaluación empírica de la comprensión de un texto matemático por parte de los estudiantes de todos los niveles. De esta fórmula se sugiere un uso evaluativo y un uso educativo.*

Palabras clave: fórmula de legibilidad, fórmula de entendimiento, dificultad de comprensión de un texto matemático, leer la matemática, escribir de matemática (TEP)

1. Antecedenti teorici e quadro di riferimento

Negli anni ’80 furono molto studiati i cosiddetti “test di leggibilità”, nati nei decenni precedenti, soprattutto per quanto riguarda la matematica; questa nuova generazione di studi durò una quindicina di anni e poi si esaurì; ma il problema della comprensione dei testi di matematica da parte degli studenti perdura … Più di un collega insegnante in non importa quale grado di scuola ci assicura che leggere e capire un testo di matematica è tutt’oggi impresa ardua per lo studente, in generale.

Fra tutti i test, ebbero fortuna i cosiddetti “test di chiusura”: si sceglie un testo di matematica e si cancella una parola ogni n (la n-esima, la $2n$-esima, e così via); lo studente è invitato a leggere il testo nel quale appaiono cancellazioni e a mettere nel posto lasciato vuoto dalla cancellazione la parola che gli sembra più opportuna per ridare un senso al testo che sta leggendo.

Varie prove empiriche soprattutto in inglese e francese, ma anche greco e italiano, fecero compiere delle scelte a proposito di costanti e variabili che apparivano nelle cosiddette formule di leggibilità.

Fra le molte ricerche in questa direzione, segnaliamo di seguito solo quelle che ci hanno offerto più strumenti per la formulazione della nostra, che mostreremo successivamente.

In varie discipline, non necessariamente in matematica, emergono per importanza, fra le altre, le ricerche di Vogel e Washburne (1928) che costituiscono un classico in questo campo; la loro analisi si basa su vari fattori, fra i quali sono predominanti la lunghezza del brano in lettura e la tipologia/difficoltà ortografica delle parole cancellate; la formula da noi cercata, invece, vorrebbe misurare la qualità della difficoltà, dunque indipendentemente dalla lunghezza del brano. La loro si riferisce all’oggetto “testo di matematica” (più o meno “facile”, dal punto di vista oggettivo), la nostra alla persona “studente che legge un testo di matematica” (studente più o meno in difficoltà nel ricostruire il testo iniziale).

Abbiamo poi gli studi di Taylor (1953), Rankin (1970) e Henry (1973); pur nelle loro differenze specifiche, essi hanno parecchio in comune tra loro: in tutti si sostiene l’opportunità e la validità del test di chiusura come strumento di analisi e si danno risultati interessanti su ricerche empiriche effettuate in aula. Le analisi presentate sono così convincenti che abbiamo deciso di optare anche noi per una formula che si basasse sul test di chiusura.

Passando alla sola matematica, segnaliamo quella che riteniamo essere la prima veramente specifica: Kane, Byrne e Hater (1974); questa ricerca, effettuata su testi di matematica in lingua inglese, non solo propone risultati sulla capacità o meno di comprensione di un testo di matematica da parte di studenti giovani, ma vi si analizzano modalità attraverso le quali aiutare gli allievi in difficoltà a comprendere i testi; questa ricerca, vedremo, in qualche modo anticipa la nostra che va nello stesso senso.

Fra le numerose altre ricerche, ci hanno particolarmente influenzato le seguenti: Gagatsis (1980, 1982, 1984, 1985, 1995) e Gagatsis e Chaney (1983).

Prendiamo in considerazione l'ultima in termini cronologici (Gagatsis, 1995) perché in essa si analizzano le varie formule e i risultati compresi nelle precedenti ricerche; le formule che vengono confrontate fra loro sono tutte del tipo:

$$\text{Leggibilità} = ax+by+cz+k$$

dove a, b, c, k sono costanti numeriche assegnate dall'esperienza, determinate dalla lingua e da altri fattori, mentre x, y, z sono variabili che rappresentano elementi oggettivamente misurabili dei test.

Le formule elaborate da Gagatsis sono basate su precedenti classiche; per esempio, la formula di Rudolph Flesh (1951) per la lingua inglese è la più diffusa:

$$\text{Facilità di lettura} = 206{,}835 - 0{,}846x - 1{,}015y$$

dove x è il numero medio di sillabe contenute in 100 parole e y è il numero medio di parole per frase.

Un famoso esempio assai citato di adattamento al francese è quello di Kandel e Moles (1958):

$$\text{Facilità di lettura} = 206{,}85 - 0{,}74x - 1{,}015y;$$

mentre un adattamento al greco appare in Gagatsis (1982):

$$\text{Facilità di lettura} = 206{,}85 - 0{,}59x - 1{,}015y.$$

In Gagatsis (1995) si è applicata una formula dello stesso tipo a un testo in lingua italiana per studenti di III media (il testo in questione era tratto da D'Amore, 1981).

Applicando a questo brano in italiano le formule di leggibilità euristicamente stabilite rispettivamente per la lingua francese e la greca, si ottengono due valori assai diversi tra loro, rispettivamente 19,05 e 52,55 con il che si dimostra che la formula è specifica per una lingua e per le sue variabili lessicografiche implicite (Gagatsis, 1995). La nostra formula, invece, basata sulla persona che legge più che sul testo, tende a proporsi come non strettamente vincolata alla lingua ma alla tipologia delle parole cancellate che vanno rimesse al loro posto.

Sulla base di questa esperienza, Gagatsis (1995) mostra come può costruirsi empiricamente una formula di leggibilità, evidenziando come la sua funzionalità necessiti di un numero assai più alto di costanti e variabili ma restando pur sempre nel campo di determinazione della maggiore o minore difficoltà di lettura del testo, grazie a formule di chiusura (cioè di reimmissione di parole dopo le cancellazioni ogni *n*) che abbiamo illustrato prima. Ma la necessità di elementi in più rende quasi inapplicabile la formula per usi che vorrebbero essere di carattere metodologico didattico, concrete e utili per una situazione d'aula reale (come abbiamo verificato durante gli studi realizzati in una tesi di maestría in Educación Matemática presso l'Università di Medellin, tesi della quale siamo stati direttori e sulla quale torneremo).

2. Difficoltà di gestione del linguaggio matematico da parte degli studenti

Le ricerche in questo ambito mettono ancora più in luce una ben nota e diffusa difficoltà degli studenti nelle ore di matematica, quella legata in generale alle interazioni fra lingua matematica e lingua comune, argomento studiato da vari autori, per esempio Laborde (1982, 1990, 1995).

Questa Autrice ha più volte evidenziato il seguente fattore: che il discorso matematico ha un codice semiologico proprio che comporta un'economia di espressione che si realizza grazie a due componenti essenziali, specifiche per il linguaggio matematico: una funzione di designazione e una di localizzazione (Laborde, 1995). Ciò comporta un uso semantico univoco e talvolta nuovo dei termini e delle modalità espressive della lingua naturale che sono in qualche modo resi specifici grazie a una loro reinterpretazione nel discorso matematico.

Altra caratteristica del discorso matematico è la sua universalità (Laborde, 1995). C'è poi il problema che, all'interno del discorso matematico, si mescolano il linguaggio naturale e (un più o meno diffuso uso della) scrittura simbolica, fatto che nel discorso naturale non avviene; lo studente e l'insegnante adottano tre tipi di strategie per far fronte alle impressionanti differenze fra i due linguaggi:

1. la ripetizione nel corso del testo dell'espressione che descrive l'oggetto matematico (cosa che nel linguaggio naturale è, di solito, il più possibile da evitare: le ripetizioni sono, di solito, considerate negative in un testo letterario e necessarie in un testo matematico);
2. il riferimento a caratteristiche temporali che hanno un senso nel linguaggio naturale, ma non in quello matematico;
3. uso di proprietà di distinzione, tipiche del linguaggio naturale ma non di quello matematico, per esempio relative alla dislocazione spaziale o alla grandezza o al tempo (Laborde, 1995).

Queste considerazioni hanno spinto Laborde ad analisi sulle difficoltà di lettura dei testi matematici, dato che in essi il linguaggio naturale e quello matematico si complementano e si intersecano (Laborde, 1995).

Una dettagliata analisi di tutto ciò si trova in D'Amore (1999a, tutto il cap. 8); ma i lavori più specifici nei quali si evidenziano problemi di interpretazione linguistica sia nella lettura in generale sia, e soprattutto, nella lettura e interpretazione dei testi scritti dei problemi verbali, si trovano in D’Amore (1993a, 1993b, 2014); in essi si mostra come si sviluppi un vero e proprio conflitto fra i due linguaggi, come fossero fra loro antagonisti; ciò anche quando l’insegnante ha predisposto situazioni adidattiche dunque situazioni che dovrebbero rendere l’allievo protagonista della costruzione del proprio sapere, linguaggio compreso (grazie alla fase di devoluzione) (D’Amore & Sandri, 1994). (Per la terminologia tecnica usata si veda D’Amore, 1999a).

Altri studi di grande interesse sulle interferenze fra linguaggio matematico e lingua comune si trovano in lavori di Maier (1989b, 1996) che mostrano diverse occasioni di mancata comunicazione da parte dello studente, mancata comunicazione che potrebbe essere banalmente ascritta a ignoranza matematica ma che invece si spiega molto meglio facendo riferimento appunto a queste interferenze. Tutti questi studi concordano, pur nelle specifiche differenze, su alcuni punti:

1. in tutti si evidenzia la difficoltà degli studenti nell’impadronirsi delle caratteristiche del linguaggio matematico in aula (D’Amore, 1999a);
2. in forma più o meno esplicita e consapevole, si studia la sensazione che avverte lo studente (di non importa quale età) di dover far uso, per motivi legati al contratto didattico, di una supposta tipicità di quel che egli avverte come linguaggio matematico usato in aula dall’insegnante e dai compagni che hanno successo nella valutazione scolastica, fino a creare un linguaggio specifico il più delle volte inopportuno, che è stato ironicamente chiamato “matematichese” (D’Amore, 1987).

Una reiterata analisi di queste difficoltà, vista da diverse angolazioni e raccogliendo le istanze segnalate dei precedenti Autori si trova in D’Amore (1993b, 1996, 1997, 2000), in D’Amore e Sandri (1994, 1996) e in D’Amore e Martini (1998).

Visto in generale l’ampio discorso sulle difficoltà di interpretazione e di gestione di un discorso che non sia rigidamente formale e matematico, ma di interrelazione fra lingua naturale e matematica scolastica, resta il problema di stabilire una formula il più possibile oggettiva per una valutazione quantitativo-numerica di tale difficoltà di interpretazione o, meglio, di interpretazione di tale testo nel corso della lettura.

3. Verso una formula oggettiva di valutazione della difficoltà di interpretazione di un testo di matematica da parte di studenti

Recentemente, abbiamo riproposto lo studio e l’applicazione delle formule classiche di leggibilità/facilità di un testo di matematica in Colombia, come argomento di una tesi sulla comprensione dei testi di matematica nei corsi 6° e 7° (I e II media) a due studentesse del master in Didattica della Matematica dell'Università di Medellin.[1] E ci siamo tutti accorti, direttori di tesi e candidate al master, che ciascuna delle formule di leggibilità adottate era da considerarsi un po' artificiosa, complicata da gestire, difficile da usare e da interpretare in concreto.

Soprattutto, la sua interpretazione era relativa al testo e non alle difficoltà dei singoli studenti con la conseguente incertezza successiva di come articolare un intervento didattico mirato sugli studenti.

Ci siamo trovati nella necessità di elaborare una formula valida per tutti i livelli scolastici che fosse più orientata verso i singoli studenti che non verso l'oggetto di studio in sé, dando anche chiarimenti definitori, come i tre seguenti:

1. che cosa vuol dire, in questo contesto, "testo di matematica";
2. che cosa vuol dire che un certo testo è adatto a un determinato gruppo-classe di studenti;
3. che cosa vuol dire "capire" un brano di un testo di matematica;
4. quali variabili determinano le differenze fra i diversi tipi di testi di matematica.

1. Nella nostra accezione, testo di matematica è un testo a carattere matematico o di contenuto matematico, non necessariamente libro di testo scolastico; può essere un parascolastico o un libro di lettura a carattere e con contenuto considerabile come matematico.
2. Un testo è considerato adatto a una classe di grado n (es. di grado 5, cioè in Italia V primaria) se è considerato unanimemente tale dall'autore che lo scrive, dalla casa editrice che lo pubblica e dall'insegnante che lo sceglie o lo consiglia.
3. Seguendo la tradizione di comprensione o leggibilità delle formule citate in 1., consideriamo che lo studente capisca un brano di un testo di matematica adatto alla classe cui appartiene se è in grado di "chiudere" il brano che presenta cancellazioni, cioè scegliere con un certo qual successo le parole che sono state cancellate nel brano, ponendo esattamente quelle cancellate o loro sinonimi secondo il giudizio di un esperto che controlla il test o dell'insegnante di classe. A questo punto si pone immediatamente un problema: che cosa significa "un certo qual successo"? La formula che abbiamo elaborato, proposto, sperimentato, più volte modificato sulla base di prove euristiche e che riporteremo fra breve, misura, a nostro avviso, una scala numerica di maggiore o minore comprensione del brano in

[1] Si tratta delle professoresse Angélica Molano Zárate e Clara Cecilia Rivera Escobar che, nel corso del 2013, hanno sostenuto in comune la tesi dal titolo *El lenguaje narrativo como propuesta didáctica para provechar los obstáculos de la comprensión en contexto matemático* presso la Universidad de Medellin, sotto la direzione di Bruno D'Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla, conseguendo il titolo di Maestría in Educación Matemática.

esame da parte di un certo studente, da un grado minimo (nessuna delle parole cancellate è stata riconosciuta e rimessa al suo posto) ad uno massimo (tutte le parole cancellate sono state riconosciute e rimesse al loro posto, esattamente quelle cancellate o suoi sinonimi).

4. Le variabili che sono state scelte per determinare le differenze aventi a che fare con i diversi tipi di testi di matematica sono state quelle descritte in (1), ma anche le seguenti: testi che accompagnano i brani scritti con figure o meno, testi che comprendono formule o meno (la formula può essere costituita anche da una sola lettera o da un segno di operazione, o da un loro complesso).

In questo scritto ci occupiamo della misura, il più possibile oggettiva, della eventuale mancata comprensione di un testo di matematica da parte di uno studente. Ma non ci occupiamo delle *cause* della mancata comprensione. Esse possono avere spiegazioni profonde che hanno la base in diverse teorie che qui non esploriamo. Si può trattare di scontri fra culture, mancanza di formazione specifica a carattere lessicale, banale ignoranza matematica, incapacità di coordinazione semantica, inadeguatezza delle informazioni a disposizione, incomprensione del compito proposto, presenza di ostacoli a carattere semiotico eccetera. Noi riteniamo che in questa direzione si possa e si debba indagare, ma ciò richiede alla base una sorta di misurazione della effettiva incomprensione di un testo scritto di matematica, non una generica impressione da parte dell’insegnante. È per questo che abbiamo deciso di affrontare come primo problema tale misurazione.

4. Decisioni prese sul brano da sottoporre alla formula di comprensione, obiettivo della ricerca, metodologia adottata

Dopo vari tentativi, abbiamo deciso di cancellare solo parole (anche se tecniche o specifiche) e non formule; le formule vengono lasciate inalterate e non vengono conteggiate fra le parole. Anche simboli isolati come lettere, numeri, segni di operazioni etc. sono considerati formule.

Esempio di III primaria.
Uno dei testi completi scelti è il seguente (Paciotti, Volpati, & Meloni, 1978, pp. 185–185):

> Con le dieci cifre che hai studiato gli anni scorsi, possiamo costruire tutti i numeri che vogliamo, all’infinito. Secondo il posto occupato dalle cifre, i numeri acquistano un valore diverso. Ogni raggruppamento di dieci oggetti forma una decina e si scrive 10. Se un numero è composto da due cifre, la cifra a destra rappresenta le unità (u), quella a sinistra le decine (da).
>
> 28 = 2 decine, 8 unità.
>
> Un gruppo di 100 oggetti, cioè cento unità (100 u), forma un centinaio e si scrive

> 100. Nel centinaio ci sono dieci gruppi di dieci oggetti, cioè dieci decine.
>
> Se un numero è composto da tre cifre, la cifra a destra rappresenta le unità, quella in mezzo le decine e quella a sinistra le centinaia (h).
>
> 289 = 2 centinaia, 8 decine, 9 unità.

Sulla base delle nostre scelte, cancelliamo le parole di posto 5, 10, 15 e così via, contando solo le parole, né i segni di punteggiatura né le lettere che formano formule, né i numeri; al posto delle parole cancellate appare uno spazio vuoto nel quale lo studente deve scrivere la parola mancante o suo sinonimo, per "chiudere" il testo dandogli un senso: ecco dunque il testo che è stato proposto agli studenti:

> Con le dieci cifre ⋯ hai studiato gli anni ⋯ , possiamo costruire tutti i ⋯ che vogliamo, all'infinito. ⋯ il posto occupato dalle ⋯ , i numeri acquistano un ⋯ diverso. Ogni raggruppamento di ⋯ oggetti forma una decina ⋯ si scrive 10. Se un ⋯ è composto da due ⋯ , la cifra a destra ⋯ le unità (u), quella a ⋯ le decine (da).
>
> 28 = 2 decine, 8 unità.
>
> ⋯ gruppo di 100 oggetti, cioè ⋯ unità (100 u), forma un centinaio ⋯ si scrive 100. Nel centinaio ⋯ sono dieci gruppi di ⋯ oggetti, cioè dieci decine.
>
> ⋯ un numero è composto ⋯ tre cifre, la cifra ⋯ destra rappresenta le unità, ⋯ in mezzo le decine ⋯ quella a sinistra le ⋯ (h).
>
> 289 = 2 centinaia, 8 decine, 9 unità.

Le parole cancellate sono dunque:

> che, scorsi, numeri, Secondo, cifre, valore, dieci, e, numero, cifre, rappresenta, sinistra, Un, cento, e, ci, dieci, Se, da, a, quella, e, centinaia.

Esempio di V secondaria.
Uno dei testi completi scelti è il seguente (Bagni, 1996, pag. 1314):

> Consideriamo la funzione reale f di variabile reale x espressa da $y = f(x)$ ed il punto di ascissa $x = c$ appartenente al dominio di essa. La valutazione diretta della f in corrispondenza dell'ascissa $x = c$ descrive, tradizionalmente, il comportamento della funzione data nel punto di ascissa $x = c$.
> Il tradizionale metodo per valutare la funzione nel punto $x = c$ si condensa quindi nella frase:
>
> «*nella formula $y = f(x)$, sostituendo alla variabile x il valore $x = c$, otteniamo per la y il valore $y = f(c)$*»
>
> e ciò equivale ad affermare che:
>
> «*nel punto di ascissa $x = c$, la funzione f assume il valore $f(c)$*».
>
> È però importante sottolineare che con un procedimento del genere otteniamo un'informazione riguardante esclusivamente il comportamento della funzione f

> nel singolo punto di ascissa $x = c$: e non sempre questa informazione è in grado di esaurire la conoscenza della funzione in una più ampia «zona» individuata dall’ascissa $x = c$.

Ed ecco il testo con le parole cancellate:

> Consideriamo la funzione reale f ··· variabile reale x espressa da $y = f(x)$ ··· il punto di ascissa $x = c$ ··· al dominio di essa. ··· valutazione diretta della f in ··· dell’ascissa $x = c$ descrive, tradizionalmente, ··· comportamento della funzione data ··· punto di ascissa $x = c$.
>
> Il ··· metodo per valutare la ··· nel punto $x = c$ si condensa ··· nella frase:
>
> «*nella formula $y = f(x)$, ··· alla variabile x il valore $x = c$, ··· per la y il valore $f(c)$*»
>
> ··· ciò equivale ad affermare ··· :
>
> «*nel punto di ascissa $x = c$, ··· funzione f assume il valore $f(c)$*».
>
> ··· però importante sottolineare che ··· un procedimento del genere ··· un’informazione riguardante esclusivamente ··· comportamento della funzione f nel ··· punto di ascissa $x = c$: e ··· sempre questa informazione è ··· grado di esaurire la ··· della funzione in una ··· ampia «zona» individuata dall’ ··· $x = c$.

Le parole cancellate sono dunque:

> di, ed, appartenente, La, corrispondenza, il, nel, tradizionale, funzione, quindi, sostituendo, otteniamo, e, che, la, È, con, otteniamo, il, singolo, non, in, conoscenza, più, ascissa.

È ovvio che la tipologia delle parole cancellate è assai variabile; nel primo esempio appaiono termini tecnici della matematica (numeri, cifre, dieci, numero, centinaia), parole di lingua a carattere logico o intrinsecamente descrittivo (che, secondo, e, sinistra), parole della lingua naturale (scorsi, valore, un, da, a, quella); così succede anche nel secondo esempio.

L’esperienza derivata dallo studio della bibliografia e dalle prove euristiche più volte ripetute provano che la tipologia delle parole cancellate incide sulla comprensione del testo; che sono più identificabili parole della lingua naturale, che non parole di carattere logico, che non termini tecnici della matematica; e che dunque, nel valutare la difficoltà di uno studente nel ricreare il brano tratto da un testo a lui adatto, l’incidenza dell’errore debba essere “pesata”; cioè un conto è non identificare la parola “cifra”, altra è non identificare la parola “e”, altra ancora è non identificare la parola “da”.

L’obiettivo di questa ricerca è dunque finalmente precisabile; è quello di: *creare una formula del tipo “test di chiusura”, indipendente dal livello scolastico, che misuri la difficoltà nella quale si trova uno studente per comprendere un brano tratto da un testo di matematica adatto al livello scolastico nel quale egli si trova*.

La prova cui è sottoposto lo studente consiste nel consegnargli il testo risultante dopo le cancellazioni sopra specificate invitandolo a sostituire negli spazi lasciati vuoti dalle cancellazioni le parole che egli reputa mancanti per ridare senso al brano in oggetto.

La formula tiene conto di tutte le variabili in gioco, ivi comprese le tipologie delle parole cancellate (vedi sopra).

La ricerca ha seguito una metodologia di carattere empirico; si è partiti da una formula scelta fra quelle che la bibliografia ha consegnato alla storia; si sono fatte indagini preliminari per saggiare la bontà della formula, ritoccando i coefficienti, fino a giungere a quelli attuali. A seconda dei risultati trovati, sulla base del rapporto fra i valori degli indici stabiliti e il valore degli indici di comprensione, man mano si ritoccavano gli indici, fino a riconoscere come soddisfacenti quelli attuali (che vedremo tra breve).

Per esempio, solo dopo l'esame di vari brani in diversi livelli scolastici, si è deciso di non cancellare le formule (intese, come abbiamo detto in precedenza, in senso vasto) e di cancellare solo le parole; infatti la cancellazione di formule era allo stesso tempo:

a) del tutto casuale a seconda del brano scelto;
b) troppo significativa in molti brani e difficile da ricostruire da parte di un novizio.

D'altra parte, ci è sembrato interessante e sensato confrontare la difficoltà di porre in relazione il linguaggio naturale con quello formale per poter valutare la comprensione testuale, più che le competenze matematiche individuali (nel senso già espresso in precedenza, seguendo le ricerche già citate di Laborde, D'Amore e Maier).

Le prove sono state effettuate soprattutto in Italia, grazie alla collaborazione di vari insegnanti membri del RSDDM di Bologna, nelle scuole primaria, secondaria di I e II grado. In giorni prefissati, gli insegnanti consegnavano ai propri allievi e ad altri di classi parallele il brano sottoposto alle cancellazioni dette, spiegavano qual era il compito e davano tempi abbondanti per l'effettuazione della prova.

Il totale delle prove fatte è di 25 classi di scuola primaria, 4 di scuola secondaria di primo grado (2 in Italia e 2 in Colombia) e 10 di scuola secondaria di II grado, per un totale di 39 classi; hanno eseguito il test 463 allievi di scuola primaria, 66 di scuola secondaria di I grado e 127 di scuola secondaria di II grado per un totale di 656 allievi (ma parecchi di questi hanno fatto più prove).

5. La nostra proposta di una formula di comprensione di un testo di matematica da parte degli allievi

Sia dato un brano T che comprende n parole. Non si considerano formule né segni di punteggiatura. Il numero delle parole cancellate è Int(n/5) cioè la parte intera del numero razionale $n/5$. Delle parole cancellate fanno parte le seguenti categorie:

c_1) parole di lingua corrente non di carattere logico né tecnico (numero a);

c_2) parole tecniche della matematica (numero b);

c_3) parole di lingua a carattere logico (connettivi: non, e, o, implica, …; quantificatori: nessuno, alcuni, tutti, …; deduttivo: siccome, poiché, dimostra, …) (numero c).

Dunque: $a + b + c = \text{Int}(n/5)$. Notiamo che n, $\text{Int}(n/5)$, a, b, c sono tutti numeri naturali.

Sia:

$$m_T = a \times 0{,}1 + b \times 0{,}3 + c \times 0{,}4;$$

il numero razionale m_T si chiama "indice di difficoltà di T".

Siano:

a' le parole di tipo c_1 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($a' \leq a$);

b' le parole di tipo c_2 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($b' \leq b$);

c' le parole di tipo c_3 che il soggetto S riconosce in forma corretta ($c' \leq c$).

Si consideri ora la formula:

$$r_{TS} = (a - a') \times 0{,}1 + (b - b') \times 0{,}3 + (c - c') \times 0{,}4;$$

il numero razionale r_{TS} si chiama "indice di comprensione di T da parte di S".

Se $r_{TS} = 0$, si considera la comprensione del brano T da parte di S perfetta.

Se $0 \leq r_{TS} < m_T/2$ si considera la comprensione del brano accettabile o positiva;

se $m_T/2 \leq r_{TS} \leq m_T$ si considera la comprensione del brano insufficiente o negativa.

Se si pone in Excel la formula e si inseriscono i numeri di errori, il valore dei singoli r_{TS} viene dato automaticamente e questo semplifica enormemente i calcoli; la valutazione dei vari punteggi r_{TS} è immediata.

6. Una nota specifica sulle prove effettuate per assegnare i valori empirici precedenti

Sono state effettuate, grazie alla collaborazione dei componenti del gruppo di ricerca e di altri insegnanti disponibili isolati, molte prove empiriche con diversi valori, scegliendo diverse componenti variabili che hanno un ruolo decisamente importante in questa situazione:

1. studenti giudicati più affidabili o meno affidabili da parte degli insegnanti,
2. testi di matematica oggettivamente molto semplici o viceversa molto difficili,
3. cancellando anche formule o parte di esse,
4. dando in una classe un testo che era giudicato idoneo per una classe precedente,

…

Insomma, si sono poste e analizzate tante variabili per giungere ai valori 0,1 , 0,3 , 0,4 precedenti (che modificano a volte sensibilmente quelli che appaiono in formule empiriche classiche).

Abbiamo deciso di non riportare qui in modo specifico tutte le prove fatte e tutti i risultati parziali ottenuti; essi sono comunque a disposizione dei colleghi ricercatori, qualora lo ritenessero utile o interessante per il proseguimento di questi studi. Molte delle nostre prove sono state tabulate e dunque sono disponibili su fogli Excel.

Fra le prove empiriche che hanno fornito interessanti indizi su valori opportuni da usare, si è rivelato particolarmente utile quella che abbiamo chiamato "il testo facilitato" (vedi punto 4 precedente).

Supponiamo che uno studente Sq ottenga un punteggio r_{T1Sq} nella lettura di un brano T1 adatto al suo livello scolastico; e che ottenga un valore r_{T2Sq} nella lettura di un brano T2 idoneo a una classe di livello scolastico precedente a quello cui appartiene Sq; la formula ha un senso empirico accettabile se in generale risulta $r_{T1St} > r_{T2St}$.

Lo studio dei risultati di comprensione fatte su testi facilitati ci è stato di grande aiuto nella determinazione dei valori empirici scelti.

7. Risultati della ricerca

Poniamo in evidenza due aspetti da prendere in esame.

7.1. La formula esprime in modo oggettivo la comprensione di un dato testo in esame; dunque fornisce un criterio empirico della valutazione della comprensione di un testo in sé. Sulla base delle scelte fatte, tale valutazione è riferita a studenti che appartengono al grado scolastico per il quale il testo è stato pensato, scritto, pubblicato e scelto.

7.2. Una volta effettuata una prova in aula su un dato brano T su *n* studenti S_1-S*n*, si può fare un'indagine statistica sugli *n* valori r_{TS} ottenuti e vedere, per esempio, dove si posiziona lo studente S*p* ($1 \leq p \leq n$). Questo posizionamento indica la difficoltà nella quale oggettivamente S*p* si trova, rispetto ai suoi compagni di classe.

Questo tipo di analisi non è presente nei lavori precedenti citati in bibliografia, ma ci è stato esplicitamente richiesto dai colleghi che hanno partecipato alla ricerca.

Più di un collega, infatti, è rimasto colpito, facendo e rifacendo prove nella classe di cui è titolare d'insegnamento, della obiettiva difficoltà che hanno mostrato alcuni studenti nel proporre parole da mettere al posto degli spazi vuoti per dare un senso al testo considerato di facile interpretazione da parte dell'insegnante. Hanno segnalato, per così dire, la necessità di favorire la comprensione testuale da parte degli studenti impegnati nel leggere brani di matematica. Riportiamo le parole che una collega-ricercatrice ci ha fatto giungere per iscritto:

> (…) d'altra parte, quando mai noi lasciamo da soli gli alunni a leggere un testo? Mai, siamo sempre lì a spiegare, a interpretare, al posto loro. Perfino quando diamo il testo di un problema, lo spieghiamo parola per parola. L'alunno non deve mai interpretare un testo, deve solo ascoltare la nostra interpretazione. (…)

E conclude:

> Nel fare questa ricerca ho capito che devo rischiare, far leggere da soli gli studenti, anche se poi sbagliano, devono imparare a capire da soli il significato (…).

(Con quel "rischiare", l'insegnante sembra riecheggiare parole famosissime di Guy Brousseau…).

Questo tipo di riflessioni rinforza quanto già emerso in alcune ricerche precedenti circa la capacità di lettura e comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti di qualsiasi età (D'Amore, 1996). E trasforma una ricerca empirica in una sollecitazione didattica non voluta all'inizio, che però pare assai opportuna.

Ci sono poi due variabili che sono state studiate ma non approfondite e che vogliamo almeno evidenziare perché ci sembrano peculiari.

7.3. Variabile uno: la presenza di una figura illustrativa all'interno del testo T che si sta usando come lettura nella prova.

In alcuni testi appariva, come parte del testo o come accompagnante il testo scritto, una figura, esclusivamente quando il contenuto del brano era di carattere geometrico. Come sempre accade in questi casi, il disegno illustra, nel registro semiotico figurale (o, più in generale, in un registro non discorsivo), quel che il testo dice nella lingua comune (nella sua versione a carattere matematico). Ora, è ben noto che molti insegnanti sono certi che il doppio registro aiuta la comprensione testuale dello studente, anche se in più occasioni, per esempio nei lavori citati qui di seguito, è stato mostrato che non è necessariamente così. La cosiddetta "visualizzazione" a volte complica la comprensione, come è stato mostrato in articoli di ricerca (D'Amore, 1995; Bagni, 1997, 1998; si vedano anche gli articoli contenuti in D'Amore, 1999b).

Per dirla in altre parole, qualche insegnante, soprattutto di scuola primaria e secondaria di I grado, pensava prima della prova che la presenza della figura illustrativa in un testo T avrebbe nettamente migliorato il valore di r_{TS}; si è invece visto come questo fatto semplicemente non sia successo.

Riteniamo che su questo punto si debba ancora fare ricerca, anche basandosi su temi specifici concernenti la semiotica che in questa sede tralasciamo (D'Amore, Fandiño Pinilla, & Iori, 2013).

7.4. Variabile due: la presenza o meno del titolo del brano T sottoposto a prova.

Alcuni testi che sono stati consegnati agli allievi iniziavano con il titolo; si trattava a volte di testi nei quali si davano le prime spiegazioni su un concetto matematico, quello richiamato nel titolo, appunto. Per esempio, in uno dei testi dati appariva il titolo: Media aritmetica. Il testo recitava come segue:

> Media aritmetica
> In statistica, si chiama media aritmetica il numero che si ottiene …

Cancellando le parole di posto multiplo di 5, ma lasciando intatto il titolo, si ottiene:

> Media aritmetica
> In statistica, si chiama ⋯ aritmetica il numero che ⋯ ottiene …

Si potrebbe ingenuamente ritenere che la prima parola cancellata (media) sia facilmente arguibile dal titolo; e invece gli studenti che scelgono di scrivere "media" al posto del primo spazio vuoto è minimo. Molti lasciano in bianco, altri scrivono: somma, espressione, calcolo (al maschile) e altri.

Il che ci riporta a considerare daccapo il senso che viene dato alla lettura del brano da parte dello studente che la esegue; forse la struttura editoriale dell'oggetto Testo T, che è ovvia per il docente, non lo è affatto per tutti gli studenti; il titolo illustra il contenuto per l'adulto, non comporta alcuna informazione per alcuni studenti (soprattutto per i più giovani).

8. Leggere e scrivere di matematica: l'apprendimento comunicativo in matematica

La classica dicotomia lettura/scrittura ci spinge a ricordare che, nella prassi scolastica matematica più o meno diffusa in tutto il mondo, si legge matematica (poco e male, a volte senza comprendere) ma che quasi mai si scrive matematica, a meno che non si tratti di testi di problemi o definizioni o regole sotto dettatura; è stato più volte rilevato invece che il modo migliore per appropriarsi dei concetti è quello di scriverne in maniera esplicita, e la matematica non fa eccezione (D'Amore & Maier, 2002). Una delle tecniche che hanno avuto più successo didattico è quella dei

> (…) TEP [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi] cioè testi elaborati in modo autonomo dagli studenti ed aventi come soggetto questioni matematiche. Essi non devono coincidere con altre produzioni scritte in modo non autonomo (compiti in classe, appunti, descrizioni di procedimenti etc.). Le produzioni di questi ultimi esempi non sono autonome, sono sottoposte a vincoli più o meno esplicitamente stabiliti, sono di solito soggetti a valutazione dirette o indirette. (…) Diciamo che si considerano TEP quelle produzioni nelle quali lo studente, messo nella condizione di *volersi* esprimere in modo comprensibile e con linguaggio personale, accetta di liberarsi da condizionamenti linguistici e fa uso di espressioni spontanee.
> Esempi di TEP sono dunque:

- protocolli commentati di problem solving (come quelli descritti sopra)
- resoconto il più possibile spontaneo di ricerche di tipo matematico (tentativi, passaggi, misurazioni, risultati,…)
- descrizioni dettagliate e spiegazioni di concetti o di algoritmi matematici
- testi introdotti da una specifica situazione che richiede di comunicare fatti e relazioni matematiche in forma scritta
- testi che definiscono concetti matematici, che formulano ipotesi, argomentazioni o prove in relazione ad un teorema matematico o comunque ad una situazione matematica
- (…). (D’Amore & Maier, 2002, pp. 145 – 146)

Fra le funzioni didattiche dei TEP sono state riscontrate le seguenti, che interessano la nostra ricerca:

> La produzione di TEP stimola lo studente ad analizzare ed a riflettere su concetti matematici, relazioni, operazioni e procedure, ricerche e processi di problem solving con cui ha a che fare. Così ciascun allievo può raggiungere una maggiore consapevolezza ed una più profonda comprensione matematica di essi. I TEP possono migliorare le competenze e le prestazioni dello studente nell’uso del linguaggio specifico, poiché gli lasciano il tempo per un’attenta e riflessiva scelta dei significati linguistici, non come accade invece, a volte, durante una discussione o durante un’interrogazione, dall’evoluzione dialogica troppo rapida e caratterizzata dalla relazione troppo pre-stabilita; il TEP incoraggia ad un uso attivo dei termini tecnici e dei simboli (Maier, 1989a, 1989b, 1993; Maier & Schweiger, 1999). I TEP danno allo studente l’opportunità di tenere continuamente sotto controllo la propria comprensione di questioni matematiche, grazie ad un ragionato e riflessivo riscontro con l’insegnante ed i compagni di classe. I TEP consentono all’insegnante di valutare in modo effettivo la conoscenza personalmente costruita e la comprensione di idee matematiche, in maniera più dettagliata e profonda di quanto sia possibile sulla base dei comuni testi scritti, normalmente eseguiti come protocolli di attività di problem solving non commentati. (D’Amore & Maier, 2002, pp. 146–147)

Sulla base di quanto evidenziato in 7. e nella prima parte di 8., ci preme evidenziare che questo tipo di studio rientra, a nostro avviso, in quello che altrove abbiamo chiamato “apprendimento comunicativo in matematica” (Fandiño Pinilla, 2008).

Non è un caso che abbiamo deciso di fare un esplicito e deciso richiamo alla problematica dello “scrivere di matematica” e ai TEP. Consegnare allo studente una prova di chiusura relativa a un testo di matematica significa pretendere una comunicazione non del tutto completa ed esplicita fra lui e l’autore del brano; comunicazione che l’allievo deve reintegrare / reinventare / ricostruire / ricreare, cioè tornare a rendere esplicita sulla base delle supposte intenzioni dell’autore che lui interpreta (oppure dell’insegnante che ha presentato il medesimo contenuto matematico, senza escludere le eventuali letture di testi di altri autori sul medesimo tema). L’allievo sta completando una comunicazione matematica esplicita parziale rendendola, dal suo punto di vista, totale o completa. In questa sua attività comunicativa, mette in gioco la sua comprensione, la sua interpretazione, la sua propria esperienza linguistica. Non è come scrivere un TEP, dove vengono assegnati un tema di cui trattare e un soggetto cui scrivere; è assai diverso: qui deve accettare la lingua di comunicazione di un altro da sé, di un autore, o insegnante, e il tema che questi sta mettendo in gioco. Ma pur sempre di comunicazione si tratta.

Se comunicare è *cum-munire* (cioè: legare o costruire con), si forma qui un processo di comunicazione di grande interesse fra un autore di un testo (scelto a monte, in genere un esperto), uno studente (novizio) che interviene a "chiudere" il testo stesso interpretandolo, un adulto (insegnante, pure esperto) che deve decidere se tale compito è stato ben eseguito. Si ha uno scambio di informazioni fra l'autore, l'insegnante e lo studente; lo studente fa leva sulla comprensione e sulla cultura personale per interpretare le informazioni lacunose; ma lo studente comunica solo implicitamente con l'autore perché sa che dovrà sottoporre il suo lavoro al vaglio dell'insegnante e dunque, di fatto, comunica principalmente con questi; l'insegnante, nell'esprimere il giudizio sulla scelta delle parole che chiudono il testo monco, comunica con lo studente, chiudendo il ciclo.

9. Conclusione

Le ricerche empiriche hanno di affascinante che non possono mai dirsi concluse; nel senso che, cambiando il campione, cambiano alcune variabili; ripetendo le prove, si possono trovare risultati che permettono di migliorare i risultati ottenuti; eccetera.

Per esempio, che cosa succede se il testo T dato in lettura è stato in precedenza discusso in aula? Che cosa succede se si è dato come compito a casa la lettura del testo, avvisando che sarebbe stato oggetto di una prova il giorno successivo? E se invece di prendere in esame un testo scritto da un autore adulto si fosse analizzato il testo di un compagno (D'Amore et al., 1995)?

Le prove di leggibilità, ferme nella ricerca al 1995, ritrovano, in questa nostra esperienza, una nuova vitalità, ma anche il peso della consapevolezza critica moderna: che tali formule non sono più considerabili come un assoluto, ma un relativo (basterebbe per esempio assegnare valori diversi ai fattori moltiplicativi). E dunque auspichiamo ampio spazio dedicabile a ricerche future in questo settore.

Le scelte che abbiamo fatto conducono a pensare che, sulle base delle nostre scelte, la nostra è ancora una formula di comprensione (non più solo di leggibilità) di tipo classico, nella direzione delle prime ricerche condotte tra gli anni '50 e '90; ma che si potrebbero aprire fronti del tutto nuovi. Ma siamo anche consapevoli che l'insegnante possa usare la nostra formula:

a) per valutare il più obiettivamente possibile la difficoltà di comprensione di un testo di matematica; per esempio facendo la prova sugli alunni della propria classe per verificare qual è la media di successo raggiunto;

b) una volta verificato che un certo testo è comprensibile alla maggior parte degli allievi della propria classe, trovare il modo di incrementare la comprensione da parte di quegli allievi che hanno ottenuto un indice di comprensione inferiore alla media.

In questo modo, infatti, siamo di fronte a indici oggettivi e non solo a intuizioni. Quando la valutazione è il più possibile oggettiva, l’aiuto che si può dare a chi è in difficoltà è più facile, si tratta solo di capire le cause che hanno portato all’insuccesso.

C’è infine da dire che, pur non essendo nelle intenzioni degli autori, questa ricerca ha messo in evidenza una lacuna di carattere didattico, una perturbazione necessaria della prassi di insegnamento-apprendimento: occorre dare la possibilità agli studenti di leggere da soli brani di matematica, evitando di interpretarli sempre e costantemente noi insegnanti. Lo studente ha bisogno di questo tipo di attività, ha bisogno di sbagliare e di correggersi, di riflettere sui testi scritti, anche in vista delle prove che dovrà per forza affrontare da solo.

Per questo speriamo di aver contribuito a una riflessione professionale su uno specifico aspetto dell’apprendimento della matematica a non importa quale livello scolastico.

Ringraziamenti

Questa ricerca, durata oltre due anni, non avrebbe potuto aver luogo senza l’appassionato e critico contributo di tutti i ricercatori menzionati all’inizio, insegnanti italiani membri del RSDDM di Bologna più due insegnanti colombiani durante un corso di maestría in Educación Matemática presso l’Universidad de Medellin. Tutti hanno contribuito in forma assai più significativa di quanto era stato loro richiesto; nel senso che non si sono limitati a far fare le prove in aula ai propri studenti, ma hanno commentato i risultati ottenuti, rifatto in taluni casi le prove con altri criteri o sotto altre regole, usando variabili che man mano venivano empiricamente proposte e sottoposte a prova. A tutti un sincero ringraziamento. Uno speciale va a chi ha coordinato il lavoro degli insegnanti-ricercatori: Erminia Dal Corso, Annarita Monaco e Maura Iori.

Nota. *Questa è la versione riassunta e rielaborata in italiano di un articolo già pubblicato in inglese: D’Amore e Fandiño Pinilla (2015).*

Riferimenti bibliografici

Bagni, G. T. (1996). *Corso di matematica 3*. Bologna: Zanichelli.

Bagni, G. T. (1997). La visualizzazione nella scuola secondaria superiore.

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, *20B*(4), 309–335.

Bagni, G. T. (1998). Visualization and didactics of mathematics in high school: An experimental research. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, *35*(1), 161–180.

D'Amore, B. (1981). *Il libro di matematica 3*. Bologna: Cappelli.

D'Amore, B. (1987). Matematica e lingua: Reciproche influenze. *Riforma della scuola*, 12, 25–32. [Questo articolo è stato ripubblicato in: AA.VV., *Incontri con la Matematica 88/89* (pp. 43–60), Mathesis Peligna, Sulmona, 1990].

D'Amore, B. (1993a). *Problemi: Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano, Angeli, II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].

D'Amore, B. (1993b). Esporre la matematica appresa: Un problema didattico e linguistico. *La matematica e la sua didattica*, *7*(3), 289–301. [Questo articolo è stato ristampato in: B. Jannamorelli (Ed.) (1994), *Insegnamento/Apprendimento della Matematica: linguaggio naturale e linguaggio della scienza*. Sulmona: Qualevita. Atti del I Sem. Internazionale di Didattica della Matematica, Sulmona marzo 1993. Questo articolo è poi stato pubblicato in lingua tedesca: *Schülersprache beim Lösen mathematischer Probleme*, in A. Gagatsis & H. Maier (Eds.) (1995), *Texte zur Didaktik der Mathematik* (pp. 105–125), Erasmus, Thessaloniki-Regensburg. Ancora in lingua tedesca, con lo stesso titolo, su: *Journal für Mathematik Didaktik*, *17*(2), 81–97 (a causa di un errore redazionale, questa versione dell'articolo uscì, per errore, a doppio nome (disponibile la lettera di scuse dell'allora Direttore)].

D'Amore, B. (1995). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 328–370. [Questo testo è stato pubblicato anche in: B. Jannamorelli (Ed.), *Lingue e linguaggi nella pratica didattica,* Atti del II Seminario Internazionale di Didattica della Matematica (pp. 79–130), Sulmona, 30-31 marzo e 1 aprile 1995, Sulmona: Qualevita].

D'Amore, B. (1996). Difficoltà nella lettura e nella interpretazione del testo di un problema. *Bollettino degli insegnanti di matematica*, 32, 57–64.

D'Amore, B. (1997). Lingua naturale, modelli intuitivi e stereotipi nelle ore di matematica. In B. Jannamorelli & A. Strizzi (Eds.), *La ricerca in didattica della matematica: da ipotesi teoriche ad esperienze didattiche*, Atti del 3° Seminario Internazionale di Didattica della Matematica (pp. 57–68), Sulmona, aprile 1997, Torre dei Nolfi (AQ): Qualevita. [Questo articolo è stato pubblicato anche su: *Riforma e didattica*, 1, 1997, 29–36].

D'Amore, B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora. [Ed in lingua spagnola: (2006). *Didáctica de la Matemática*, Bogotá: Editorial Magisterio. Ed. in lingua portoghese: (2007). *Elementos da Didática da Matemática*. São Paulo: Livraria da Física. Con prefazioni di Ubiratan D'Ambrosio, Luis Rico Romero, Colette Laborde e Guy Brousseau].

D'Amore, B. (Ed.) (1999b). *Continuità e scuola*. Progetto per un percorso formativo unitario dalla scuola dell'infanzia alla secondaria superiore. Vol. 3: *La Matematica*. Quaderni di Documentazione dell'Istituto Pedagogico di Bolzano, n. 6. Quattro volumi in cofanetto. Milano-Bolzano: Junior.

D'Amore, B. (2000). Lingua, matematica e didattica. *La matematica e la sua didattica*, *14*(1), 28–47.

D'Amore, B. (2014). *Il problema di matematica nella pratica didattica*. Prefazioni di

Gérard Vergnaud e di Silvia Sbaragli. Modena: Digital Index. [Versione cartacea e versione e-book].

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). A formula for an objective measurement of students' understanding difficulties of a mathematical text. Evaluative and educational use. *Scientia Paedagogica Experimentalis* (Gand, Belgio), *52*(1-2), 27–58. ISSN: 0582-2351

D'Amore, B., & Maier, H. (2002). Produzioni scritte degli studenti su argomenti di matematica (TEPs) e loro utilizzazione didattica. *La matematica e la sua didattica*, *16*(2), 144–189.

D'Amore, B., & Martini, B. (1998). Il "contesto naturale". Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *21A*(3), 209–234. [Questo articolo è stato stampato anche in traduzione spagnola: Suma, 30, 1999, 77–87].

D'Amore, B., & Sandri, P. (1994), Everyday language and "external" models in an a-didactic situation. In N. Malara & L. Rico (Eds.). [Ristampato in: A. Gagatsis (Ed.) (1994), (in greco) 253–262, (in francese) 585–594].

D'Amore, B., & Sandri, P. (1996). "Fa' finta di essere...". Indagine sull'uso della lingua comune in contesto matematico nella scuola media. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *19A*(3), 223–246. [Questo articolo è stato ristampato in lingua spagnola su: *Revista EMA*, *Investigación e innovación en educación matemática* (Bogotà, Colombia), *4*(3), 1999, 207–231].

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *Primi elementi di semiotica. La sua presenza e la sua importanza nel processo di insegnamento-apprendinento della matematica*. Prefazioni di Raymond Duval e di Luis Radford. Bologna: Pitagora. [Ed. in lingua spagnola: (2013). *La semiotica en la didáctica de la matemática*. Prefacios de Raymond Duval, Luis Radford. Prólogo a la edicción en idioma español de Carlos Eduardo Vasco. Bogotá: Magisterio].

D'Amore, B., Franchini, D., Gabellini, G., Mancini, M., Masi, F., Matteucci, A., Pascucci, N., & Sandri P. (1995). La ri-formulazione dei testi dei problemi scolastici standard. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, *18A*(2), 131–146. [Questo articolo è stato ristampato in lingua inglese su: A. Gagatsis & L. Rogers (Eds.) (1996). *Didactics and History of Mathematics* (pp. 53–72), Erasmus ICP 954 G 2011/11, Thessaloniki].

Fandiño Pinilla, M. I. (2008). *Molteplici aspetti dell'apprendimento della matematica. Valutare e intervenire in modo mirato e specifico*. Prefazione di Giorgio Bolondi. Trento: Erickson. [Versione in lingua spagnola: (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Prólogo de Giorgio Bolondi. Bogotá: Magisterio].

Flesh, R. (1951). *How to test readability*. New York: Harper and Row.

Gagatsis, A. (1980). *La transmission de l'information et son application a deux manuels scolaires*. Strasbourg IREM: Université Louis Pasteur.

Gagatsis, A. (1982). *Discrimination des scores au test de clôture et évaluation de la compréhension des textes mathématique*, Strasbourg, novembre 1982 (Thèse de 3e cycle).

Gagatsis, A. (1984). Préalables a une mesure de la compréhension. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *5*(1), 43–80.

Gagatsis, A. (1985). Questionnes soulevées par le test de clôture. *Revue Française de*

Pédagogie, 70, 41–50.

Gagatsis, A. (1995). Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici. *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 136–146.

Gagatsis, A., & Chaney, E. (1983). Le test de clôture en classe. *L'ouvert*, 32, 21–33.

Henry, G. (1973). *Construction de trois formules de lisibilité spécifiques à la langue francaise*. Thèse de doctorat, Università di Liège.

Kandel, L., & Moles, A. (1958). Application de l'indice de Flesh à la langue française. *Cahiers d'étude de la Radio-Télévision*, 19.

Kane, R., Byrne, M., & Hater, M. (1974). *Helping children read mathematics*. New York: American Book Company.

Laborde, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique: Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse d'État, Univ. J. Fourier, Grenoble.

Laborde, C. (1990), Language and mathematics. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.) (1990), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.

Laborde, C. (1995), Occorre apprendere a leggere e scrivere in matematica? *La matematica e la sua didattica*, *9*(2), 121–135.

Maier, H. (1989a). Problems of language and communication. In Pehkonen E. (Ed.) (1989), *Geometry – geometrieunterricht* (pp. 23–36). Helsinki: University.

Maier, H. (1989b). Conflit entre langage mathématique et langue quotidienne pour les élèves. *Cahiers de didactique des mathématiques*, 3, 86–118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, *9*(3), 1995, 298–305].

Maier, H. (1993). Domande che si evolvono durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*, *7*(2), 175–191.

Maier, H. (1996). Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superale. In B. D'Amore B. (Ed.), *Convegno del decennale*. Atti dell'omonimo Convegno Nazionale (pp. 27–48), Castel San Pietro Terme, Bologna, Pitagora.

Maier, H., & Schweiger, F. (1999). *Mathematik und sprache. Zum verstehen und verwenden von fachsprache im mathematikunterricht*. Wien: Hölder-Piechler-Tempsky.

Paciotti, R., Volpati, M., & Meloni, L. (1978). *Evviva*, III classe (pp. 184–185), Novara: De Agostini.

Rankin, E. F. (1970). The cloze procedure, its validity and utility. In R. Farr (1970), *Measurement and evaluation of reading* (pp. 237–253). New York: Harcourt, Brace and World.

Taylor, W. L. (1953). Cloze procedure: A new tool for measuring readability. *Journalism Quarterly*, *30*(4), 415–433.

Vogel, M., & Washburne, C. (1928). An objective method of determining grade placement of children's reading material. *Elementary school journal*, *28*(5), 373–381.

Cómo estudiantes para maestros miran de manera estructurada la enseñanza de las matemáticas al escribir narrativas

Pere Ivars, Ceneida Fernández y Salvador Llinares

Universidad de Alicante

Abstract. *The aim of our study is to identify characteristics of how pre-service teachers notice teaching situations. We analyse thirty-nine narratives written by prospective teachers about events that they identified as relevant in the teaching and learning situations during their period of practices at primary schools. Results indicate that professional noticing is supported by some characteristics that focused on identifying relevant mathematical elements in the activity and using them to interpret students' understanding, and making teaching decisions considering the interpretation of the students' understanding. These two features allow us to define dependence relations between the cognitive skills of identifying, interpreting and making teaching decisions that conceptualize the notion of professional noticing. Finally, some implications for teacher education are provided.*

Keywords: Professional noticing, narratives, pre-service primary school teachers, teachers' competence

Sunto. *Lo scopo del presente studio consiste nell'identificare la modalità con la quale gli insegnanti in formazione percepiscono la situazioni d'insegnamento. Sono state analizzate trentanove narrazioni scritte da docenti in formazione, relative ad eventi da loro ritenuti rilevanti nelle situazioni di insegnamento-apprendimento della matematica, vissuti durante il loro periodo di tirocinio nella scuola primaria. I risultati indicano che il "professional noticing" è supportato da alcune caratteristiche che si focalizzano sull'identificazione di elementi matematici rilevanti nell'attività, sul loro utilizzo per l'interpretazione della comprensione degli alunni e sulla presa di decisioni in considerazione della interpretazione previa della comprensione. Queste caratteristiche ci permettono di definire relazioni di interdipendenza tra le abilità cognitive di identificazione, interpretazione e presa di decisioni, intorno alle quali si articola il concetto di "professional noticing". Infine, vengono evidenziate alcune implicazioni per la formazione dei docenti.*

Parole chiave: "Professional noticing", narrazioni, docenti di scuola primaria in formazione, competenza docente

Resumen. *El objetivo de este estudio es identificar características de cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada las situaciones de enseñanza. Se analizaron treinta y nueve narrativas escritas por estudiantes para maestro sobre sucesos que identificaron como relevantes en las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas durante su período de prácticas. Los* *resultados indican características de cómo estudiantes para maestro miran de manera estructurada una situación de enseñanza, que se apoyan en la identificación de elementos matemáticos relevantes en la actividad y su uso para interpretar la comprensión de los estudiantes, y en la propuesta de decisiones sobre la enseñanza basada en su interpretación previa de la comprensión. Estas características nos permiten definir relaciones de dependencia entre las destrezas cognitivas de identificar, interpretar y decidir que articulan la competencia docente mirar profesionalmente. Finalmente, generamos algunas implicaciones para la formación de maestros.*

Palabras clave: Mirada profesional, narrativas, estudiantes para maestro de primaria, competencia docente

1. Introducción

Las reformas de la enseñanza de las matemáticas inciden en la importancia de que los maestros sean capaces de considerar cómo los estudiantes están aprendiendo para fundamentar sus decisiones de enseñanza (NCTM, 2000). La realización de esta tarea se apoya en la capacidad de los maestros de ser conscientes de los aspectos de las situaciones de aula que son importantes para llegar a interpretar el aprendizaje matemático de los estudiantes. Comprender cómo se articula y desarrolla esta competencia docente se ha convertido en los últimos años en un objetivo de investigación en el ámbito de la didáctica de la matemática (Mason, 2001; Sherin, Jacobs, & Philipp, 2011). El presente trabajo se enmarca en esta línea de investigación, indagando sobre contextos que permitan a los estudiantes para maestro aprender a mirar de manera estructurada las situaciones de enseñanza.

2. Mirar profesionalmente y escribir narrativas

2.1. La competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes y su desarrollo

Mason postuló que mirar profesionalmente implica "un movimiento o un cambio en la atención" (Mason, 2011, p. 45). Mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas implica trasladarse desde la descripción de acciones del profesor a cómo los estudiantes están aprendiendo y desde realizar comentarios evaluativos a comentarios de carácter más interpretativo basados en evidencias (Bartell, Webel, Bowen, & Dyson, 2013; van Es, 2011). Para apoyar esta transición, algunos instrumentos específicos en la formación de maestros han mostrado su validez, como el análisis de video-clips en los que se muestran interacciones entre maestro y estudiantes (Coles, 2013; Schack et al, 2013; van Es & Sherin, 2002; 2008), el uso de respuestas de alumnos entendidos como artefactos de la práctica para ser analizadas por los estudiantes para maestro (Fernández, Llinares, & Valls, 2012; Sánchez-Matamoros, Fernández, & Llinares, 2015) y la creación de contextos de interacción entre los maestros cuando analizan las situaciones de enseñanza (Kazemi & Franke, 2004; Steinberg, Empson, & Carpenter, 2004), y entre los maestros y los formadores de maestros (Coles, Fernández, & Brown, 2013).

Mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes es una manera de entender cómo los maestros toman sentido de las complejidades de la clase que tiene en cuenta dónde focalizan su atención y cómo interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs, Lamb, Philipp, & Schappelle, 2011; Weiland, Hudson, & Amador, 2013). Jacobs, Lamb, & Philipp (2010) conceptualizan esta competencia mediante tres destrezas interrelacionadas: (i) describir las estrategias usadas por los estudiantes identificando los elementos matemáticos importantes, (ii) interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes en función de los elementos matemáticos usados y, (iii) decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes. Por otra parte, el desarrollo de esta competencia está siendo descrito desde perspectivas socioculturales que inciden en la manera en la que los estudiantes para maestro dotan de sentido a las situaciones de enseñanza-aprendizaje integrando y relacionando el conocimiento vinculado a sus experiencias previas, la información proporcionada por los cursos de formación y cómo relacionan e integran estos conocimientos al generar procesos de atención consciente (identificar lo que consideran relevante), y dotarlos de sentido (interpretarlo) (Goos, 2008; Llinares, 2009; Wells, 2002).

La investigación presentada aquí aporta nuevo conocimiento en esta agenda de investigación en relación a las características de cómo los estudiantes para maestro aprenden a *mirar de manera estructurada las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas*. En particular, el objetivo es identificar características del desarrollo de esta competencia docente cuando los estudiantes para maestro escriben narrativas sobre situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas durante el período de prácticas en los centros de educación primaria.

2.2. El papel de las narrativas en el aprendizaje de la competencia mirar profesionalmente la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Las narrativas son historias en las que el autor relata, de manera secuencial, una serie de acontecimientos que cobran sentido para él, a través de una lógica interna (Chapman, 2008; Doyle & Carter, 2003; Ponte, Segurado, & Oliveira, 2003). Escribir narrativas es un mediador de aprendizaje, capaz de “desarrollar funciones cognitivas superiores, como el análisis y la síntesis” (Emig, 1977, p. 122). Desde esta perspectiva la escritura es vista como una herramienta para la construcción del conocimiento cuya función principal es mediar entre el recuerdo y la reflexión (Wells, 1999) ya que por su abstracción, y en comparación con el habla, obliga al escritor a actuar más intelectualmente. Para Wells esta característica implica que la escritura desarrolla "el modo abstracto y racional de pensar considerado como el punto final del desarrollo mental" (p. 278).

Por otra parte, la escritura es una herramienta para el desarrollo de la comprensión a través de la representación de la experiencia construida a partir de un punto de vista analítico (Wells, 1999) dando sentido a la propia experiencia por lo que nos permite comprender cómo los docentes organizan su trabajo y actúan en los contextos profesionales (Polkinghone, 1988; Huchim & Reyes, 2013). Connelly y Clandinin (1990) defienden el uso de narrativas en la investigación educativa indicando que "los seres humanos somos organismos contadores de historias, organismos que, individual y socialmente, vivimos vidas relatadas. El estudio de la narrativa, por tanto, es el estudio de la forma en que los seres humanos experimentamos el mundo" (p. 2). Considerar a los estudiantes para maestro como narradores de sus propias historias en el contexto de los programas de formación de maestros (Chapman, 2008) puede ayudarles a mirar de manera cada vez más estructurada las situaciones de enseñanza dando sentido a su experiencia durante su período de prácticas. Las narrativas de los estudiantes para maestro en las que describen lo que ellos consideran relevante sobre el aprendizaje se convierten así en una herramienta para su aprendizaje. Desde esta perspectiva, las narrativas se conciben como medios que permiten a los estudiantes para maestro crear esquemas explicativos mediante el análisis de las situaciones de enseñanza y su reflexión sobre dichas situaciones (Schultz & Ravitch, 2013).

En esta investigación analizamos la relación entre escribir narrativas durante el período de prácticas y el desarrollo de una mirada estructurada sobre la enseñanza. Nos planteamos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo estudiantes para maestro identifican e interpretan las situaciones de enseñanza-aprendizaje?
- ¿De qué manera los estudiantes para maestro apoyan sus propuestas de acción en su interpretación del pensamiento matemático de los estudiantes?

3. Método

3.1. *Participantes y contexto*

Los participantes fueron 39 estudiantes para maestro durante el período de prácticas (practicum) en los centros de educación primaria. Este período de prácticas tiene una duración de 8 semanas durante su cuarto año en el programa de formación inicial de maestros (el programa tiene una duración de

8 semestres). Antes de este periodo de prácticas los estudiantes habían cursado tres asignaturas centradas en las matemáticas de la educación primaria (aritmética, geometría y tratamiento de datos) y un curso de didáctica de las matemáticas (aspectos relativos a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en la educación primaria), además de realizar en los cursos anteriores otros dos periodos de prácticas centrados en el conocimiento sobre el funcionamiento de los centros escolares (aspectos organizativos y de gestión) y otros aspectos generales (organización escolar y aspectos psicológicos). La primera parte del periodo de prácticas del último curso de formación (dos semanas) consiste en la observación de los procesos de enseñanza-aprendizaje con foco específico en las diferentes materias curriculares, y en la segunda parte, los estudiantes para maestro deben planificar e implementar una unidad didáctica en la clase donde han estado haciendo la observación. Durante la primera parte de este último periodo de prácticas, se pidió a los estudiantes para maestro que escribieran una narrativa describiendo sucesos del aula que consideraban potencialmente relevantes para explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes que podía estar generándose en el aula.

3.2. Narrativas

La narrativa consistía en la descripción e interpretación de una situación de enseñanza-aprendizaje. Para facilitar la estructuración de la información, se proporcionaron a los estudiantes para maestro unas preguntas guía considerando las tres destrezas que conceptualizan la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje: describir, interpretar y decidir:

- **Describe la situación**

  la tarea/actividad. Por ejemplo, puedes indicar los contenidos específicos, materiales, uso de las TIC,…

  qué hacen los alumnos. Por ejemplo, puedes indicar respuestas de los alumnos a la tarea propuesta, dificultades,…

  qué hace el maestro. Por ejemplo, puedes indicar como gestiona la actividad en el aula (agrupación de los alumnos, interacciones…) o si ante las respuestas de los alumnos (o dificultades), propone otras tareas, insiste en algún aspecto de la actividad,...

- **Interpreta la situación**

  Indica **qué objetivos** del área de matemáticas parece que justifican lo que ves explicitando qué aspectos de la situación te hacen pensar que se están desarrollando dichos objetivos.

  Indica, a través de las respuestas de los estudiantes, **evidencias que muestren la manera en que se están consiguiendo los objetivos propuestos**. Es decir, evidencias que muestren cómo los estudiantes están logrando la comprensión de los conceptos matemáticos.

Indica si se **desarrollan otras competencias básicas**. Muestra evidencias del desarrollo de dichas competencias.

- **Completa la situación**

  Intenta **complementar la situación descrita para potenciar el desarrollo de la competencia matemática** identificada o algún otro aspecto de la competencia que no se haya contemplado inicialmente.

La interpretación generada por los estudiantes para maestro podía fundamentarse en los conocimientos de matemáticas y didáctica de la matemática del programa de formación. Tanto la información proporcionada por los cursos de formación como su experiencia previa como aprendices de matemáticas se consideran referentes para identificar el aspecto que consideran relevante en una situación de enseñanza-aprendizaje y destacar evidencias de la comprensión matemática de los estudiantes. La narrativa debía terminar con una propuesta de actividades para seguir la lección observada.

3.3. Análisis

En el análisis de las narrativas escritas por los estudiantes para maestro consideramos como unidad de análisis frases y párrafos que expresaran una idea. Desde una muestra de narrativas, tres investigadores individualmente identificaron unidades de análisis en tres dominios: cómo describían, cómo interpretaban y qué decisiones de acción tomaban. Las categorías inicialmente generadas para cada uno de estos dominios fueron discutidas y consensuadas para generar criterios de análisis para el resto de las narrativas. En este proceso de análisis inductivo consideramos (Tabla 1):

- Si para describir las respuestas de los estudiantes, los estudiantes para maestro usaban los elementos matemáticos relevantes para la tarea.
- Si relacionaban los elementos matemáticos específicos de la situación con la comprensión de los estudiantes al interpretar su aprendizaje.
- Si consideraban la comprensión conjeturada de los estudiantes para justificar las actividades propuestas.

Tabla 1
Ejemplo de unidad de análisis

Extracto de Narrativa (unidad de análisis)	**Análisis**
Los estudiantes estaban representando una serie de número en el ábaco: a. *Algunos alumnos representaron el 16 como el 13 y el 14 como el 15.* b. *Varios alumnos no representaron el 10.* c. *Algunos alumnos escribieron algún número al revés como el 5 y el 7.* *Los alumnos del apartado a) cometieron errores en el conteo de las unidades (es decir, cuando recitaban la secuencia numérica para contar las unidades)* *Los alumnos del apartado b) tuvieron dificultades en la «agrupación» de 10 unidades formando 1 decena «y no hay ninguna unidad».* *Los alumnos del apartado c) tuvieron dificultades en la representación del número*	El estudiante para maestro identifica elementos matemáticos relevantes para la situación: • secuencia numérica • escritura del número, valor de posición • idea de agrupamiento. Identifica las dificultades de los estudiantes y las relaciona con los elementos matemáticos relevantes en la actividad. Infiere la comprensión de los estudiantes de los elementos matemáticos relevantes en la comprensión del Sistema de Numeración Decimal (idea de agrupamiento y de valor de posición).

4. Resultados

El análisis realizado nos permitió identificar tres características de cómo los estudiantes describían e interpretaban las situaciones de enseñanza-aprendizaje:

- la no identificación de los elementos matemáticos relevantes en la situación,
- la identificación de los elementos matemáticos relevantes y su uso para interpretar la comprensión de los estudiantes,
- el uso de la relación entre los elementos matemáticos relevantes y la interpretación de la comprensión para justificar la propuesta de acciones de enseñanza.

4.1. La no identificación de los elementos matemáticos relevantes

Dieciocho estudiantes para maestro, de los 39 que participaron en el estudio escribieron una narrativa en la que solo aportaban cometarios descriptivos de la situación de enseñanza-aprendizaje con alguna perspectiva evaluativa. Por ejemplo, en la siguiente narrativa el estudiante para maestro comienza describiendo el contexto de aula, indicando el contenido matemático y una interacción:

> *La siguiente actividad se realizó en 2º curso de Educación Primaria en una clase de 21 alumnos. La tarea que he observado trata sobre la resta llevando [...] En primer lugar, la maestra pone un ejemplo en la pizarra de una resta llevando para ayudar a los alumnos a entenderla mejor. Después, reparte la ficha y hacen las dos primeras restas todos juntos. Para hacer esto, la maestra elige una alumna para salir a hacer la siguiente resta en la pizarra 23-14:*
>
> (1) Maestra: *Yo a 3 melones puedo quitarle 4?*
> (2) Alumna: *No.*
> (3) Maestra: *Entonces...*
> (4) Alumna: *Le pido una decena al 2.*
> (5) Maestra: *Como por ejemplo ya puedo...*
> *(Cuentan todos juntos: 5, 6, 8... hasta llegar al 13)*
> (6) Alumna: *De 4 a 13, 9.*
> (7) Maestra: *Ahora ya estamos en las decenas, pero tienes que devolverme la decena que te he dado.*
> (8) Alumna: *Ahora de 2 a 2, 0.*

El estudiante para maestro no menciona el algoritmo que está introduciendo la maestra ni los elementos matemáticos que lo definen, y simplemente describe lo que observa. En este caso la maestra está introduciendo un algoritmo que se apoya en la propiedad $(a - b) = (a + k) - (b + k)$ en el caso particular de sumar 10 unidades al minuendo y una decena al sustraendo. Sin embargo, el hecho de que la alumna indique *"Le pido una decena al 2"* (interacción 4) indica que está intentando usar la idea de desagrupar una de las decenas. El estudiante para maestro no menciona ninguno de los dos elementos matemáticos que parecen estar presentes en las interacciones de la maestra y la alumna (introducción del algoritmo mediante la propiedad $(a - b) = (a + k) - (b + k)$ y la idea de desagrupar la decena), y por tanto no hay evidencias de que reconozca la incoherencia generada en el aula en esos momentos entre el discurso y los elementos matemáticos que pretenden ser usados.

El estudiante para maestro describe las dificultades que esta forma de proceder ha generado pero sin relacionarlas con los elementos matemáticos del procedimiento introducido por la maestra, ni identificando la falta de coherencia entre lo que pretende ser usado por el alumno y la maestra. En este caso el estudiante para maestro solo realiza comentarios evaluativos sin indicar las evidencias ni proporcionando alguna justificación:

> *La mayoría de los alumnos cuando están haciendo las restas en la pizarra lo comprenden, pero a la hora de hacer la actividad solos, les cuesta algo más. Algunos de ellos suman, tienen dificultades con el nuevo modo de realizar las restas o no recuerdan cuánto vale el puntito que le ponen a la decena del número de abajo. Para resolver estas dificultades la maestra los ayuda con preguntas y volviendo a explicarles cómo se hacen…*

Para finalizar, este estudiante para maestro aporta, como decisión de acción, una propuesta genérica centrada en el uso de los bloques multibase para explicar el algoritmo de la resta apoyado en la idea de desagrupar las decenas, pero sin relacionarla con la naturaleza de la interacción ni justificar cómo lo haría.

> *No completaría la sesión con otras actividades, sino que daría la explicación de las restas llevando de otra manera: utilizando los bloques multibase, que es como lo he aprendido con la asignatura de Didáctica de las Matemáticas.*

La propuesta busca introducir una alternativa en la situación de aula apoyada en el uso de los bloques multibase y justificada por la identificación de las dificultades de los niños. Sin embargo, el estudiante para maestro no justifica su decisión y solo busca crear una situación diferente sin considerar los elementos matemáticos que pueden estar presentes en la situación y sin ser consciente de que la falta de relación entre los elementos es lo que justificaría las dificultades observadas en los estudiantes.

Este tipo de narrativas indican que la identificación de los elementos matemáticos en una situación de aprendizaje (la discrepancia entre el uso de dos algoritmos diferentes para realizar la resta y las propiedades sobre las que se apoyan cada uno de ellos) es necesaria para generar información sobre el aprendizaje matemático. La falta de estas referencias impide mirar de manera estructurada las situaciones de enseñanza y poder llegar a ser consciente de lo que articula la situación observada.

4.2. La identificación de los elementos matemáticos relevantes en la situación y su uso para interpretar la comprensión de los estudiantes

Diez estudiantes para maestro, después de describir una situación de enseñanza-aprendizaje identificaron los elementos matemáticos relevantes para interpretar la comprensión matemática de los estudiantes. De esta manera, el uso de los elementos matemáticos les permitió articular su mirada de la situación permitiéndoles generar una interpretación de lo que estaba sucediendo desde el punto de vista del aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, estos estudiantes para maestro propusieron decisiones de acción poco específicas y poco relacionadas con la comprensión de los estudiantes. Por ejemplo, un estudiante para maestro escribió una narrativa en la que describe el contexto (25 alumnos de cuarto curso de educación primaria) y el problema que se estaba resolviendo. En el problema que centra la narrativa, los alumnos tenían que interpretar una tabla de datos (clasificación de los equipos en la liga de fútbol) y responder a algunas preguntas que requerían hacer comparaciones y realizar algunas operaciones (Figura 1).

Este problema implica la comprensión de la representación de datos en una tabla y requería una lectura del gráfico para comparar, interpretar e integrar datos desde la tabla centrándose en el desarrollo de la *transnumeración* que consiste en producir nueva información no disponible en los datos con un cambio de representación (rellenar los datos que faltan en la fila de uno de los equipos para mostrar que comprenden la forma en la que están organizados los datos en la tabla, cuestión 4 en la tarea) (Gal, 2002).

La tabla muestra los resultados de la liga de fútbol del colegio. Recuerda que un partido se puede ganar (PG = 3 puntos), empatar (PE = 1 punto) perder (PP = 0 puntos)

	PG	PE	PP	Puntos
Lobos	2	2	4	8
Águilas	4	2	2	
Murciélagos	2	4	2	
Loros	3			12
Delfines				13

1. ¿Cuántos partidos jugó cada equipo?

   a) 4 b) 8 c) 12 d) 13

2. ¿Cuántos puntos ganó el equipo de las Águilas?

   a) 4 b) 8 c) 14 d) 25

3. ¿Cuántos partidos empataron los Loros?

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

4. Si el equipo de los Delfines solo perdió un partido. ¿cuántos partidos ganó?

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5. ¿Qué equipo ganó el campeonato?

   a) Delfines b) Águilas c) Murciélagos d) Loros

Figura 1. Problema utilizado en el aula descrito en la narrativa del estudiante para maestro.

A continuación este estudiante para maestro describió una interacción entre el maestro y algunos estudiantes que respondían de manera incorrecta a la cuestión cuatro *("Si el equipo de los Delfines solo perdió un partido. ¿Cuántos partidos ganó?").*

> Estudiante 1: *El equipo de los Delfines ganó seis partidos.*
> Estudiante 2: *Han ganado cuatro partidos y han empatado 1.*
> *El maestro, volvió a leer el problema e intentó utilizando las manos o con representaciones gráficas que entendiesen el problema.* […]

> *Las respuestas aportadas por estos estudiantes no estaban fundamentadas en una descomposición del número 13 como nº de partidos ganados por 3 puntos más número de partidos empatados (cada partido empatados es 1). En el caso del primer alumno esta respuesta errónea puede tener su origen en una interpretación inapropiada de los datos aportados por el propio problema, ya que, en primer lugar no se trata de una de las respuestas propuestas en el enunciado (1, 2, 3 o 4 partidos) y en segundo lugar, si este alumno hubiese establecido las relaciones apropiadas entre los datos aportados se habría dado cuenta de que, con los datos aportados por el enunciado, si los Delfines ganaron en total 13 puntos, su respuesta de seis partidos ganados no tenía sentido (6 PG × 3 puntos = 18 puntos).*
> *En cuanto a la respuesta del segundo estudiante denota un problema similar, este alumno presenta dificultades en la interpretación de los datos ya que no tiene en cuenta el total de partidos jugados (8) y la incidencia de este dato en la respuesta correcta. Si han jugado 8 partidos y solo han perdido 1 el resto de partidos debe formar parte de su respuesta, por el contrario este alumno centra su atención en la obtención del resultado de puntos (4 PG × 3 puntos = 12 puntos más 1 PE × 1 punto = 1 punto; 12 puntos + 1 punto = 13 puntos).*

La identificación de las dificultades se acompañó de una explicación de las posibles causas como que la *lectura de los datos* de la tabla debe hacerse correctamente como punto de apoyo para llegar a *leer dentro de los datos* (interpretar e integrar los datos de la tabla comparando y relacionando las cantidades). La interacción describe las dificultades que tienen algunos niños para comprender la manera en la que están organizados los datos de la tabla (y lo que estos indican) y por tanto, para completar algunas partes de la tabla produciendo nueva información no disponible en los datos con un cambio de representación. La identificación de la *transnumeración* como un elemento matemático relevante en esta situación permite al estudiante para maestro apoyar su interpretación de las dificultades de los niños. En este caso, la dificultad se presenta cuando los niños deben usar la relación de que el total de puntos (Puntos) procede de considerar la relación posible PG × 3 + PE × 1, con la condición de que el número total de partidos jugados es 8. El estudiante para maestro identifica y usa el elemento matemático relevante en esta situación (la idea de *transnumeración* puesta de manifiesto en las dos relaciones, PG × 3 + PE × 1 + PP × 0 = 13, y PG + PE + PP = 8) para interpretar las posibles causas del error del primer niño y la manera en la que podría obtener más información de lo que dice el segundo niño al interpretar que no está proporcionando toda la información generada por la relación PG + PE + PP = 8.

El reconocimiento de elementos matemáticos relevantes en la actividad se vincula a la comprensión de los gráficos y tablas, *leer los datos y leer dentro de los datos* y a cómo generar nueva información a partir de lo aportado por la tabla. La relación de estos elementos matemáticos con la comprensión pone de manifiesto la posibilidad de reconocer dos aspectos de la competencia matemática relativa a la comprensión de las tablas: (a) interpretar y evaluar de manera crítica información basada estadísticamente desde un amplio rango de fuentes, y (b) formular y comunicar una opinión razonada a partir de esta información (Gal, 2002). Por otra parte, la capacidad de *leer dentro de los datos* como un elemento matemático relevante en la comprensión de tablas y gráficos se relaciona con la idea de descomposición de un número, es decir $13 = (3 \times 3) + (4 \times 1)$, y la importancia de la interpretación de los datos de un problema en la resolución de problemas (el papel del número "8" como un dato importante generado tras la interpretación de la manera en la que estaba organizada la tabla). La identificación de los elementos matemáticos relevantes en la actividad y su uso para interpretar las causas de las dificultades de los niños evidencian rasgos de una mirada estructurada de las situaciones de enseñanza. Estos rasgos permiten definir un grado de desarrollo articulado a través de la relación entre la identificación de los elementos matemáticos relevantes en la situación y su uso para dotar de sentido a las interacciones de los alumnos.

Sin embargo, aunque los estudiantes para maestro en este grupo eran capaces de usar los elementos matemáticos para interpretar las dificultades identificadas en las interacciones de los estudiantes, no eran capaces de definir con claridad decisiones instruccionales basadas en el reconocimiento de esta comprensión. Así, este estudiante para maestro en la parte final de su narrativa aporta recomendaciones generales de cómo plantearía la misma actividad, sin definir los objetivos de aprendizaje vinculados a la comprensión de los elementos matemáticos relevantes previamente identificados:

> (…) considero que sería mejor trabajar este tipo de actividades de manera individual que trabajando con toda la clase y añadiendo algunas normas que permitan a todos los alumnos pensar.

4.3. Propuesta de acciones de enseñanza apoyadas en la relación entre los elementos matemáticos relevantes y la interpretación de la comprensión

Once estudiantes para maestro describieron en sus narrativas situaciones de enseñanza-aprendizaje identificando los elementos matemáticos importantes, interpretando la comprensión de los estudiantes en función de dichos elementos matemáticos, proponiendo decisiones de acción específicas centradas en estos elementos matemáticos y justificándolas.

Por ejemplo, en la siguiente narrativa un estudiante para maestro describe una situación en segundo curso de Educación Primaria (niños de 7-8 años):

> *La maestra escribió en la pizarra lo siguiente:*
>
> *2 quilos_____ 4 medios quilos*

2 quilos_____ 5 medios quilos
3 quilos_____ 6 medios quilos
1 quilo _____ medio quilo y dos cuartos de quilo.

Después la maestra preguntó a sus alumnos si pensaban que la primera parte de las sentencias eran iguales a la segunda parte. Para las dos primeras sentencias no hubo dificultades pero en la tercera y la cuarta se creó un pequeño debate porque algunos estudiantes pensaban que eran verdaderas y otros que eran falsas.

Los alumnos que pensaban que las dos últimas no eran verdaderas no consideraron la relación entre la unidad de medida quilogramo y los conceptos de mitad (medio) y cuarto de quilo.

Este estudiante para maestro interpreta las dificultades que tienen los estudiantes en relación a la comprensión de los conceptos de unidades de medida y de las fracciones y sus relaciones. En la última equivalencia juega un papel importante la relación entre el medio quilo y el cuarto de quilo. En la parte final de su narrativa, este estudiante para maestro propone el uso de material estructurado con una actividad concreta y contextualizada como actividad de ampliación y sugiere que esta actividad apoyaría el desarrollo inicial de la comprensión de los estudiantes del concepto de fracción y en particular el uso de fracciones unitarias (1/a) como fracciones a partir de las cuales construir la unidad de referencia en el contexto de unidades de medida estándar:

Sería conveniente crear en el aula situaciones de la vida diaria que habitualmente vivan nuestros alumnos. Se podrían utilizar las balanzas que dispone el centro para, utilizando por ejemplo paquetes de arroz, realizar diferentes pesadas partiendo de la unidad y establecer la equivalencia con sus consiguientes subdivisiones. Por ejemplo pesar dos quilos de arroz y pedirles que establezcan la equivalencia en medios quilos y cuartos de quilo en el otro lado de la balanza. Este hecho les permitiría experimentar en contextos reales la equivalencia entre el quilo, el medio quilo y el cuarto de quilo. Además, esta actividad nos permite empezar a dotar de significado el concepto de parte-todo de fracciones.

El estudiante para maestro describe la situación, y luego piensa sobre ella desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas. Para ello define objetivos de aprendizaje vinculados a los elementos matemáticos que ha identificado como relevantes en la situación (uso de fracciones unitarias en el contexto de equivalencia de medidas estándar de peso) y plantea nuevas situaciones de aula focalizadas en apoyar la comprensión de las relaciones entre las medidas (1/2 kilo = 2 veces ¼ de kilo).

Los estudiantes para maestro hacen uso de los elementos matemáticos clave para describir la situación e interpretar la comprensión de los estudiantes puesta de manifiesto por la manera de resolver las actividades y apoyan sus propuestas de enseñanza en estas interpretaciones.

5. Discusión y conclusiones

El objetivo de esta investigación es identificar características de cómo los estudiantes para maestro miran de manera estructurada las situaciones de enseñanza. El análisis de las narrativas ha puesto de manifiesto la dificultad que experimentan algunos estudiantes para maestro para mirar de manera estructurada una situación de enseñanza. Los resultados indican que esta competencia implica llegar a establecer relaciones entre (i) identificar los elementos matemáticos relevantes en la actividad planteada, (ii) usarlos para interpretar la comprensión de los estudiantes, y (iii) justificar las decisiones sobre la enseñanza apoyadas en la relación anterior. Por tanto, la manera en la que los estudiantes para maestro establecían estas relaciones cuando escribían las narrativas, nos aportan información sobre la relación entre las diferentes destrezas cognitivas de identificar, interpretar y generar propuestas de acción que articulan el desarrollo de una *mirada estructurada* sobre la enseñanza. Para desarrollar lo que significan estas relaciones en la caracterización de una mirada estructurada en la formación de maestros, nos centramos en el papel dado al hecho de escribir narrativas. Este instrumento tiene la capacidad de poner de manifiesto el grado de desarrollo de la competencia docente logrado durante la formación inicial y nos muestra los aspectos que deben integrarse en el desarrollo de esta competencia (descriptores). Finalmente, generamos algunas implicaciones para la formación de maestros centradas en el desarrollo de esta competencia docente.

5.1. La interdependencia de las destrezas de interpretar, y decidir propuestas de acción en relación a la identificación de los elementos matemáticos relevantes

Los resultados obtenidos muestran que las narrativas parecen ser un instrumento que permite mostrar el grado de desarrollo de lo que significa mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. En particular, han permitido mostrar la existencia de tres grupos de estudiantes para maestro que reflejan diferentes características que nos ayudan a definir grados de desarrollo de esta competencia.

De los 39 estudiantes para maestro, 21 identificaron los elementos matemáticos relevantes de la situación de enseñanza-aprendizaje e interpretaron la comprensión de los estudiantes usando dichos elementos y aportando evidencias. Sin embargo, solo 11 estudiantes para maestro que habían interpretado la comprensión de los estudiantes, propusieron decisiones de acción específicas centradas en la comprensión de los elementos matemáticos relevantes de la situación. Estos datos indican la manera en la que se integran las diferentes destrezas que componen la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes. En particular, la destreza de proponer decisiones de acción resulta de mayor dificultad para los estudiantes para maestro. Por otro lado, hubo estudiantes para maestro que solo aportaron descripciones de los sucesos del aula sin identificar evidencias de la comprensión de los estudiantes. Estos resultados, se alinean con los obtenidos en otras investigaciones en el sentido de que la competencia docente *mirar profesionalmente* se apoya inicialmente en *ser capaz de usar* el conocimiento de matemáticas y de didáctica de las matemáticas, para describir e interpretar el aprendizaje y justificar las decisiones de acción. Ello implica una dependencia entre la identificación de los elementos matemáticos relevantes en la situación y el uso de dichos elementos para describir el aprendizaje de los estudiantes y por tanto interpretar lo que pueden estar comprendiendo (Coles et al., 2013; Fernández et al., 2012; Schack et al., 2013).

Nuestros resultados indican que existen tres aspectos que deben integrarse en el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. En primer lugar, el ser capaz de reconocer e identificar los elementos matemáticos característicos de la situación de aprendizaje. Es decir, los elementos matemáticos que deben ser considerados en la progresión del aprendizaje conceptual en los estudiantes. La falta de estos puntos de apoyo parece impedir la generación de una mirada estructurada sobre el aprendizaje y favorece la propuesta de comentarios generales y poco relevantes para apoyar la progresión del aprendizaje conceptual de los estudiantes. En segundo lugar, la manera en la que se deben usar los elementos matemáticos característicos de la situación para determinar los niveles de progresión en el aprendizaje conceptual de los estudiantes. Es decir, la manera en la que se puede interpretar el nivel de comprensión de los estudiantes al considerar cómo utilizan los elementos matemáticos para resolver las actividades propuestas por el maestro. En los casos descritos se refiere a la manera en la que las dificultades evidenciadas por los estudiantes para maestro eran relacionadas con la falta de compresión de los elementos matemáticos que caracterizaban la actividad propuesta en la lección.

Finalmente, hemos identificado el papel relevante que desempeñan la manera en la que se justifican las decisiones de enseñanza para potenciar la progresión en el aprendizaje. El hecho de que los estudiantes para maestro identifiquen los elementos matemáticos e interpreten la comprensión de los estudiantes en relación a los conceptos implicados, no siempre les lleva a proponer decisiones dirigidas a apoyar la progresión en el aprendizaje del estudiante. En este sentido, la destreza de proponer decisiones de acción para la enseñanza y justificarlas desde la interpretación de la comprensión generada a partir de la relación entre los elementos matemáticos y las respuestas de los estudiantes, indica un nivel alto de desarrollo de la competencia docente *mirar profesionalmente* las situaciones de enseñanza. Es decir, las destrezas identificar e interpretar parecen estar relacionadas y permiten considerar dicha relación como un descriptor del nivel de desarrollo de esta competencia. Por otra parte, cuando las decisiones de acción que ayudan a progresar están justificadas por la relación que se establece entre la identificación de los elementos matemáticos y la interpretación de la comprensión, entonces podemos considerar esta justificación como un descriptor de un nivel alto de desarrollo de la competencia docente *mirar profesionalmente*.

5.2. Implicaciones para la formación de maestros

Nuestra investigación muestra que las narrativas pueden ser un recurso adecuado y una alternativa a la hora de fijar la atención en cómo los estudiantes para maestro miran de manera estructurada las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. El hecho de que algunos estudiantes para maestro no consiguieran realizar más que comentarios descriptivos, nos invita a reflexionar sobre la manera en que los estudiantes para maestro parecen ignorar la atención dirigida hacia un aspecto particular de las situaciones de enseñanza-aprendizaje (Mason, 1998). Este hecho genera una cuestión vinculada al papel que puede desempeñar la escritura de diferentes narrativas con retroalimentación por parte de los tutores en el desarrollo de una mirada estructurada. Compartir las narrativas con otros estudiantes para profesor creando grupos de reflexión conjunta y recibiendo comentarios e interacciones por parte del tutor, tanto de manera presencial como utilizando foros virtuales, (Fernández et al., 2012) podría ayudar a los estudiantes para maestro a pasar de niveles bajos de desarrollo de esta competencia a niveles más altos. Sin embargo, somos conscientes de que no puede esperarse de este tipo de experiencias cambios inmediatos, pero sin duda pueden ser un paso más para apoyar el aprendizaje de los estudiantes para maestro (Little, 1993 en Van Es & Sherin, 2008), y en particular, para apoyar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje.

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyecto EDU2014-54526-R del Ministerio de Economía y Competitividad, España; y del proyecto para grupos de investigación emergentes GV/2014/075 de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

Referencias

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: Recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57–79.

Chapman, O. (2008). Narratives in mathematics teacher education. En D. Tirosh & T.

Wood (Eds.), *The International Handbook of Mathematics Teacher Education. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (vol 2, pp. 15–38). Taiwan/Rotterdam: Sense Publishers.

Coles, A. (2013). Using video for professional development: The role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(3), 165–184.

Coles, A., Fernández, C., & Brown, L. (2013). Teacher noticing and growth indicators for mathematics teachers development. En A. M. Lindmeier & A. Heinze (Eds.), *Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of mathematics Education*, (vol. 2, pp. 209–216). Kiel, Germany: PME.

Connelly, F. M., & Clandinin, D. J. (1990). Stories of experience and narrative inquiry. *Educational Researcher*, *19*(5), 2–14.

Doyle, W., & Carter, K. (2003). Narrative and learning to teach: Implications for teacher-education curriculum. *Journal of Curriculum Studies, 35*(2), 129–137.

Emig, J. (1977). Writing as a mode of learning. *College composition and communication*, *28*(2), 122–128.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. Mathematics Education*, *44*(6)*,* 747–759.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1–25.

Goos, M. (2008). Sociocultural perspectives on the learning and development of mathematics teachers and teacher-educator-researchers. *ICME 11*, Regular Lecture, Monterrey, Mexico, 291–306.

Huchim, D., & Reyes, R. (2013). La investigación biográfico-narrativo, una alternativa para el estudio de los docentes. *Actualidades Investigativas en Educación*, *13*(3), 1–27.

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202.

Jacobs, V., Lamb, L., Philipp, R., & Schappelle, B. (2011). Deciding how to respond on the basis of children's understandings. En M. G. Sherin, V. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing* (pp. 97–116). New York: Routledge.

Kazemi, E., & Franke, M. L. (2004). Teacher learning in mathematics: Using student work to promote collective inquiry. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(3), 203–235.

Llinares, S. (2009). Learning to "notice" the mathematics teaching. Adopting a socio-cultural perspective on student teachers' learning. En Gomes, A. (Ed.). *EME2008 Elementary mathematics education* (pp. 31–44). Braga, Portugal: Barbosa y Xavier, Ltda.

Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *1*(3), 243–267.

Mason, J. (2001). *Researching your own practice: The discipline of noticing.* London:

Routledge.
Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing through Teachers' eyes* (pp. 35–50). New York: Routledge.
NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.
Polkinghorne, D. E. (1988). *Narrative knowing and the human sciences*. Suny Press.
Ponte, J. P., Segurado, I., & Oliveira, H. (2003). A collaborative project using narratives: What happens when pupils work of mathematical investigations? En A. Peter-Koop, V. Santos-Wagner, C. Breen, & A. Begg (Eds.), *Collaboration in teacher education: Examples from the context of mathematics education* (pp. 85–97). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
Sanchez-Matamoros, G. Fernández, C., & Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 1*(6)*,* 1305–1329.
Schack, E. O., Fisher, M. H., Thomas, J. N., Eisenhardt, S., Tassell, J., & Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(5), 379–397.
Schultz, K., & Ravitch, S. (2013). Narratives of learning to teach: Taking on professional identities. *Journal of Teacher Education, 64*(1), 35–46.
Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds.) (2011). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 35–50). New York: Routledge.
Steinberg, R. M., Empson, S. B., & Carpenter, T. P. (2004). Inquiry into children's mathematical thinking as a means to teacher change. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *7*(3), 237–267.
van Es, E. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134–151). New York: Routledge.
van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to notice: Scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, *10*(4), 571–596.
van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2008). Mathematics teachers' "learning to notice" in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, *24*(2), 244–276.
Weiland, I. S., Hudson, R. A., & Amador, J. M. (2014). Preservice formative assessment interviews: The development of competent questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *12*(2), 329–352.
Wells, G. (1999). *Dialogic inquiry: Towards a socio-cultural practice and theory of education*. Cambridge University Press.
Wells, G. (2002). Learning and teaching for understanding: The key role of collaborative knowledge building. *Advances in research on teaching*, *9*, 1–42.

Procesos en matemáticas: Una perspectiva ontosemiótica

Vicenç Font
Universitat de Barcelona, España
Norma Rubio
Pontificia Universidad Católica del Perú

Abstract. *This paper presents a theoretical development of the Onto-Semiotic Approach (OSA) through the incorporation of the notion of "process" within this theoretical framework. First we show how the use of the construct "epistemic configuration of mathematical objects" in conjunction with certain mathematical processes allows a better analysis of mathematical practices. Second, we delves into the processes of idealization and generalization. Finally, we proposed to consider a set of 16 processes that are derived from the theoretical framework and use them (metaphorically) as a vector basis for studying processes. This methodology is applied to study the processes of representation and the metaphorical processes.*

Keywords: process, idealization, generalization, representation, metaphorical processes

Resumen. *En este trabajo se presenta un desarrollo del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática afrontando la problemática del encaje de los "procesos" dentro de dicho marco teórico. Primero se muestra cómo el uso del constructo "configuración epistémica de objetos matemáticos" conjuntamente con determinados procesos matemáticos permite un mejor análisis de las prácticas matemáticas. Después se profundiza en los procesos de idealización y generalización. Por último, se propone considerar un conjunto de 16 procesos que se derivan del marco teórico y usarlos (metafóricamente) como una base vectorial para estudiar procesos. Esta metodología de estudio se aplica a los procesos de representación y a los metafóricos.*

Palabras clave: procesos, idealización, generalización, representación, procesos metafóricos

1. Introducción

En diversos trabajos Godino y colaboradores han desarrollado el enfoque ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemática (Godino & Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Contreras, & Font, 2006; Godino, Batanero, & Font, 2007 y 2008; Font, Planas, & Godino, 2010; Font, Godino, & Gallardo, 2013) a partir de ahora utilizaremos el acrónimo EOS para referirnos a dicho enfoque.

El primer objetivo de este trabajo es mostrar como el uso del constructo "configuración epistémica de objetos matemáticos" conjuntamente con determinados procesos matemáticos considerados en el EOS permite un mejor análisis de las prácticas matemáticas. El segundo es explicar cómo se entienden en el EOS algunos de los procesos considerados en dicho enfoque, en concreto en este artículo se explica la manera de entender los procesos de materialización-idealización y los de particularización-generalización. El tercero es afrontar, en el marco del EOS, la problemática de la relación entre algunos de los procesos considerados en el marco teórico y la problemática de cómo tratar otros procesos no considerados directamente en dicho marco.

La estructura de este artículo es la siguiente, en la sección 2 se comenta muy brevemente el marco teórico del EOS. En la sección 3 se presenta una tarea sobre la mediatriz que será utilizado como contexto de reflexión. En la sección 4 se hace un primer análisis de dicha tarea utilizando el constructo "configuración epistémica". En la sección 5 se amplía el análisis de la sección anterior focalizando la atención en los procesos de materialización – idealización y particularización – generalización. En la sección 6 se profundiza en el papel que juegan los elementos genéricos en los procesos de particularización y generalización. En la sección 7 se reflexiona, utilizando como contexto el caso del proceso de representación, sobre el hecho de que los procesos considerados en el EOS no se pueden considerar de manera aislada y se propone que una de las maneras de estudiar esta relación es analizar el proceso desde las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales. En la sección 8, después de poner de manifiesto que los procesos contemplados en la actual síntesis del EOS no cubren todos los posibles procesos a tener en cuenta en la actividad matemática, se toma como contexto de reflexión uno de los no contemplados, los procesos metafóricos, y se sigue el mismo análisis realizado en la sección anterior, es decir también se analizan desde las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales. El artículo termina con unas consideraciones finales.

2. Marco teórico

En la Figura 1 se sintetizan una parte de las diferentes nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática ocupa el lugar central y se modeliza en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. De estas prácticas emergen los distintos tipos de objetos matemáticos, que están relacionados entre sí formando configuraciones epistémicas (hexágono). Por último, los objetos que intervienen en las prácticas matemáticas y los emergentes de las mismas, según el juego de lenguaje en que participan, pueden ser considerados desde las cinco facetas o dimensiones duales (decágono). Tanto las dualidades como los objetos se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos que se recogen en la Figura 1.

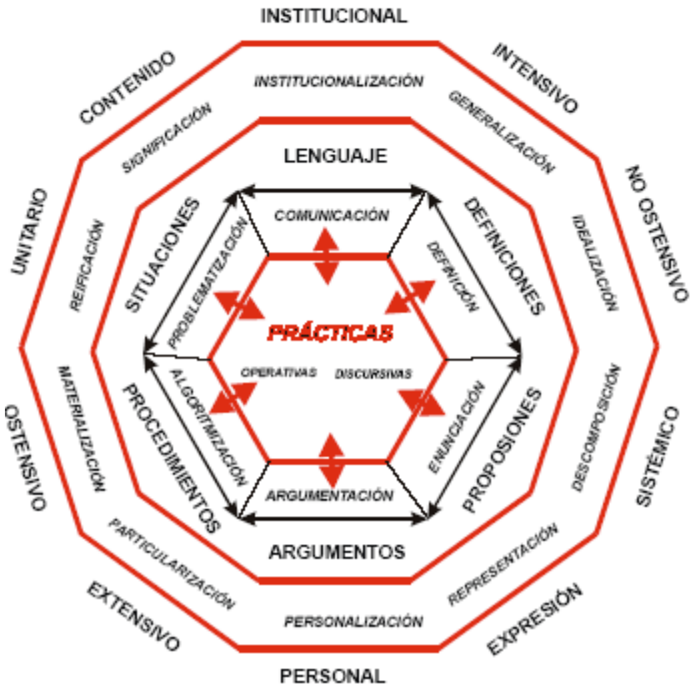


Figura 1. Modelo ontosemiótico de los conocimientos matemáticos.

En el EOS no se intenta dar, de entrada, una definición de “proceso” ya que hay muchas clases diferentes de procesos, se puede hablar de proceso como secuencia de prácticas, se puede hablar de procesos cognitivos, de procesos metacognitivos, de procesos de instrucción, de procesos de cambio, de procesos sociales, etc. Se trata de procesos muy diferentes en los que, quizás, la única característica común a muchos de ellos sea la consideración del factor “tiempo” y, en menor medida, el de “secuencia en la que cada miembro toma parte en la determinación del siguiente”. Por tanto, en el EOS, en lugar de dar una definición general de proceso, se ha optado por seleccionar una lista de los procesos que se consideran importantes en la actividad matemática (los de la Figura 1), sin pretender incluir en ella a todos los procesos implicados en la actividad matemática, ni siquiera a todos los más importantes, entre otros motivos porque algunos de los más importantes (por ejemplo, el proceso de comprensión o el de modelización) más que procesos son hiper o mega procesos:

> La *resolución de problemas*, y de manera más general, la *modelización* debe ser considerada más bien como “hiper-procesos” matemáticos, al implicar configuraciones complejas de los procesos matemáticos primarios (establecimiento de *conexiones* entre los objetos y *generalización* de técnicas, reglas y justificaciones). La realización efectiva de los procesos de estudio

> requiere, además, la realización de secuencias de prácticas de planificación, control y evaluación (*supervisión*) que conllevan procesos meta-cognitivos. (Godino, Batanero, & Font, 2006, p. 9)

3. Una tarea como contexto de reflexión

Vamos a utilizar, como contexto de reflexión para mostrar el tipo de aplicación que hacemos de algunos de los constructos teóricos elaborados por el enfoque ontosemiótico, la siguiente tarea (Font & Godino, 2006).

> *Tarea:* La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio. A partir de la siguiente construcción geométrica realizada con el programa Cabri:
>
> a) Halla una propiedad que cumplan todos los puntos de la mediatriz.
>
> b) Demuestra esta propiedad.
>
> c) Da una nueva definición de mediatriz.
>
> d) Halla a partir de los apartados anteriores un procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz.

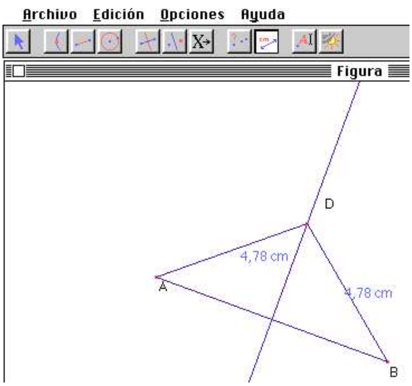


Figura 2. La mediatriz con el Cabri.

4. Configuraciones epistémicas

En el currículum de algunos países los tipos de "objetos matemáticos" que se consideran son sólo dos: conceptos y procedimientos. Se trata de una "ontología" demasiado simplista para analizar los objetos matemáticos que componen un texto matemático, y en general la actividad matemática sea profesional o escolar. En el EOS se considera que es necesario contemplar una ontología más amplia formada por los siguientes elementos: 1) lenguaje, 2) situaciones-problema, 3) conceptos, 4) procedimientos, técnicas…, 5) proposiciones, propiedades, teoremas, etc. y 6) argumentos. Estos seis tipos de objetos se articulan formando *configuraciones epistémicas* (Figura 3) cuyo análisis nos informa de la “anatomía de un texto matemático”. Si además de la “estructura” interesa analizar su “funcionamiento” con alumnos son necesarias otras herramientas, en especial los procesos contemplados en la Figura 1. En este trabajo nos proponemos aplicar tanto los procesos de la Figura 1 como las configuraciones epistémicas (o cognitivas, según se mire desde la perspectiva institucional o personal) al análisis de una práctica matemática.

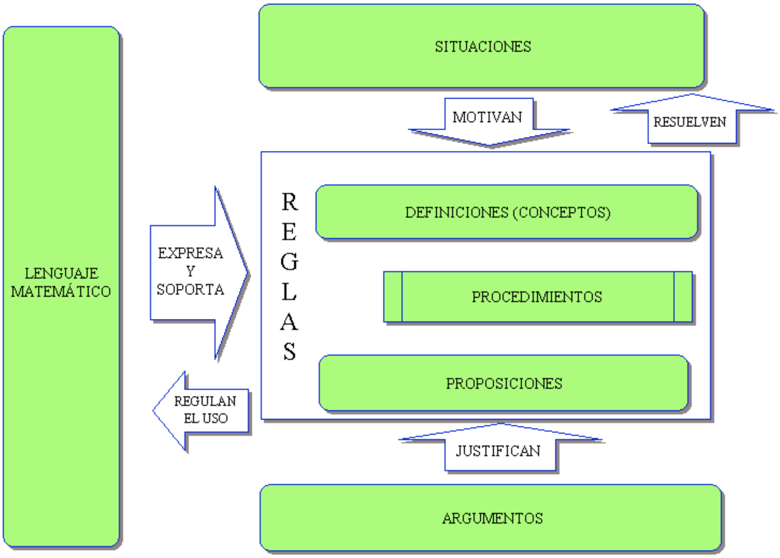


Figura 3. Componentes y relaciones en una configuración epistèmica.

Entendemos por práctica del alumno la lectura de la tarea y su resolución. La herramienta “configuración epistémica” nos permite ver la estructura de los objetos que posibilitan la práctica que debe realizar un alumno hipotético (para cada alumno concreto, tendríamos una configuración cognitiva). La configuración epistémica asociada es la siguiente:

Tabla 1
Configuración epistémica “emergente” asociada a la mediatriz

LENGUAJE
Verbal mediatriz, segmento, recta perpendicular, punto medio etc. *Gráfico* - Figura geométrica dinámica *Simbólico*: A, B, …

SITUACIONES
- Problema descontextualizado de construcción geométrica en el que se ha de hallar y justificar una propiedad de la mediatriz.

CONCEPTOS
Previos
- Segmento, recta perpendicular, punto medio - Mediatriz (definida como recta perpendicular que pasa por el punto medio)
Emergentes
- Mediatriz (definida como recta formada por todos los puntos que están a la misma distancia de los extremos del segmento)

PROCEDIMIENTOS
Emergente - Procedimiento de construcción con regla y compás de la mediatriz

PROPOSICIONES
- El punto medio divide al segmento en dos segmentos de igual longitud - La recta perpendicular forma un ángulo de 90º con el segmento - …. *Emergente* Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento

ARGUMENTOS
- Justificación visual de la propiedad "Los puntos de la mediatriz se hallan a igual distancia de los extremos del segmento". - Justificación de la propiedad utilizando elementos genéricos. - Demostración deductiva (?)

En esta configuración destaca el papel central que juega la situación problema (de tipo intra matemático) y también que está orientada a la emergencia de nuevos objetos matemáticos (nueva definición de la mediatriz y nuevo procedimiento de construcción). Puesto que se trata de una configuración epistémica cuyo objetivo es la emergencia de nuevos objetos es evidente que propicia claramente algunos de los procesos que se hallan en el interior del hexágono, como son los procesos de enunciación (apartado a), argumentación (apartado b) definición (apartado c) y algoritmización (apartado d).

En este trabajo no entraremos en el análisis de estos 4 procesos, algunos de los cuales ya han sido objeto de investigaciones específicas en el marco del EOS. Por ejemplo, Godino y Recio (1997), utilizando el marco ontosemiótico, analizaron los rasgos característicos del significado de la noción de prueba en distintos contextos institucionales: lógica y fundamentos de las matemáticas, matemática profesional, ciencias experimentales, vida cotidiana y clase de matemáticas. Su conclusión es que el estudio de los problemas epistemológicos y didácticos que plantea la enseñanza de la prueba en la clase de matemáticas debe encuadrarse dentro del marco más general de las prácticas argumentativas humanas. Asimismo, se observa cómo en los distintos niveles de enseñanza se superponen los diversos significados institucionales de la prueba, lo que podría explicar algunas dificultades y conflictos cognitivos de los estudiantes con la prueba matemática.

5. Materialización-idealización y particularización-generalización

Además de los 4 procesos anteriores, en la resolución de la tarea se activan algunos de los procesos asociados a las facetas duales (decágono exterior). En concreto, vamos a analizar, de acuerdo con Font y Contreras (2008), en esta sección el papel que juegan los procesos de materialización-idealización y los de particularización-generalización en esta tarea.

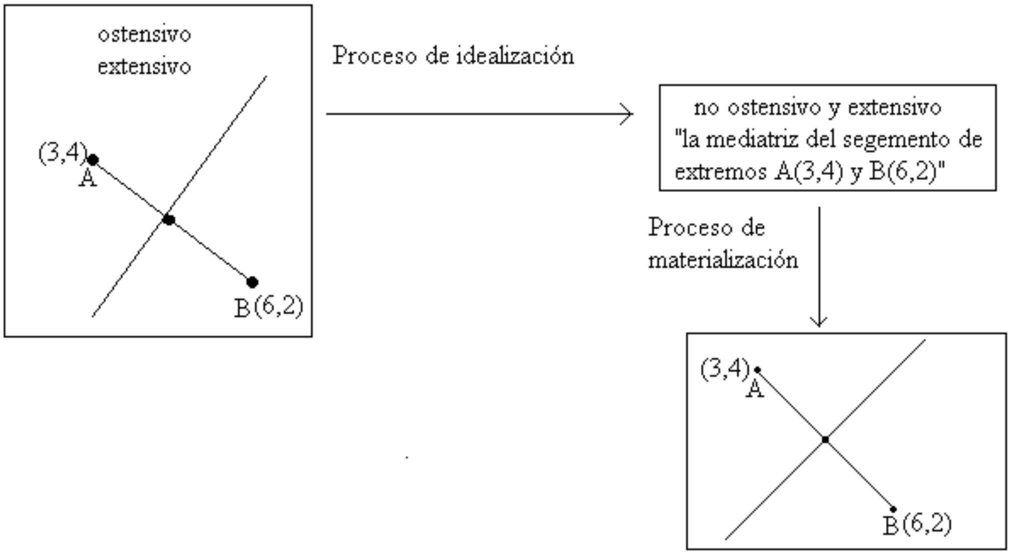
5.1. Procesos de idealización y de materialización

Platón fue uno de los primeros que puso de manifiesto la importancia del proceso de idealización al considerar a los objetos de la experiencia como copias imperfectas de las "ideas" matemáticas. Desde entonces, la necesidad de tener en cuenta el proceso de idealización en la actividad matemática ha sido observada por muchas personalidades ilustres. Por ejemplo, Fischbein (1993) tiene muy en cuenta el proceso de idealización en su teoría de los "conceptos figurales". También es importante el proceso de idealización (entendido como caso límite de lo concreto) en la obra de Kitcher (1984), este autor sostiene que los orígenes de las matemáticas son empíricos y pragmáticos, y propone una posición constructivista que afirma que las matemáticas son una ciencia idealizada de operaciones que podemos realizar con relación a objetos cualesquiera. Para Kitcher las matemáticas son como una colección de historias sobre las realizaciones de un sujeto ideal al cual se le atribuyen poderes de actuación superiores a los que tienen las personas normales -por ejemplo, recorrer los términos de una progresión geométrica. Las acciones nuevas que consideramos que son realizables no son acciones cualesquiera sino aquellas que amplían acciones que se consideran realizables por las personas.

Los mecanismos mediante los cuales las personas, consideradas individualmente o socialmente, llegan a las ideas matemáticas y como éstas son materializadas en sistemas de signos a efectos de comunicación son motivo de investigación (directa o indirectamente) en casi todos los programas de investigación que se han desarrollado en el área de la Didáctica de las

Matemáticas. Para citar un solo ejemplo, uno de los programas que están emergiendo con más fuerza en el área, el “embodiment” (Lakoff & Núñez, 2000), se plantea precisamente investigar como las personas generan las ideas matemáticas.

Los procesos de materialización-idealización, en el EOS, están asociados a la faceta ostensivo-no ostensivo. Supongamos que, antes de la tarea comentada en el apartado anterior, el profesor ha dibujado en la pizarra la figura de la izquierda (Figura 4) y que habla sobre ella como si fuera la mediatriz del segmento que tiene por extremos los puntos A(3,4) y B(6,2) esperando, además, que los alumnos interpreten de esta manera dicha figura:



Figuras 4 y 5. Procesos de idealización y de materialización.

Si se observa bien la Figura 4 de la izquierda se tiene que: (1) el segmento no es una segmento de línea recta, (2) la mediatriz no es una recta ya que es sólo un segmento de la mediatriz, (3) además dicho segmento tampoco es un segmento de línea recta, (4) no pasa exactamente por el punto medio, (5) los puntos A y B y el punto medio son muy gruesos, (6) el ángulo que forma la supuesta mediatriz con el segmento no es exactamente de 90º, etc.

Es evidente que el profesor espera que sus alumnos hagan el mismo proceso de idealización sobre la figura de la pizarra que él ha realizado y su discurso sobre ella omite los inconvenientes comentados en el párrafo anterior. Es decir, la figura de la pizarra se constituye en una figura ideal, explícita o implícitamente, por el tipo de discurso que el profesor realiza sobre ella. La figura de la pizarra es una figura concreta y ostensiva (en el sentido que está dibujada con el material “tiza” y es observable por cualquier persona que esté en el aula) y como resultado del proceso de idealización se tiene un objeto (la mediatriz del segmento AB) no ostensivo (en el sentido de que se supone que es un objeto matemático que no se puede presentar directamente si no es mediante ciertos ostensivos asociados) Por otra parte, este objeto no ostensivo es particular, a saber, es la mediatriz del segmento de extremos A(3,4) y B(2,6) y no es, por ejemplo, la mediatriz del segmento de extremos (4,4) y (8,7). A este tipo de objeto "individualizado" en el enfoque ontosemiótico le llamamos un extensivo. Por tanto, como resultado del proceso de idealización hemos pasado de un ostensivo que era extensivo a un no ostensivo que sigue siendo un extensivo.

La otra cara de la moneda es que para poder manipular los objetos no ostensivos necesitamos representaciones ostensivas, las cuales son el resultado de un proceso de materialización (y también de representación). Siguiendo con el ejemplo de la mediatriz dibujada en la pizarra, el profesor podría darse cuenta que la figura no está muy bien hecha para después borrarla y sustituirla por una figura "más perfecta" (la Figura 5 de la derecha).

En el caso de al Figura 2, actúan los procesos de idealización y materialización ya que se considera que la mediatriz de la pantalla del ordenador es una materialización del objeto matemático "mediatriz del segmento AB".

El proceso de idealización es un proceso que duplica entidades ya que, además del ostensivo que está en el mundo de las experiencias materiales humanas, se crea (como mínimo de manera virtual) un no ostensivo idealizado. La relación que se establece entre estas dos entidades es la de expresión-contenido ya que se considera que el ostensivo es la representación del no ostensivo. Este hecho tiene algunas implicaciones que queremos resaltar, la primera es que cualquiera de los procesos contemplados en la Figura 1 está relacionado con otros de los procesos también considerados en dicha figura, sobre esta cuestión volveremos en el apartado 5.

La segunda es que la relación de representación se da entre objetos claramente diferentes (ostensivos por una parte y no ostensivos por la otra). Ahora bien, a pesar de que por una parte se acepta que los objetos no ostensivos sólo son accesibles por medio de sus ostensivos asociados, se puede caer en el error de segregar este par de objetos y dar vida independiente a los objetos no ostensivos (algo parecido a cuando se considera el espíritu como algo segregado del cuerpo), entre otros motivos porque el discurso objetual que se suele utilizar en las matemáticas induce a creer en la "existencia" del objeto matemático como algo independiente de su representación. Wittgenstein (1987) ha sido, seguramente, uno de los filósofos de la matemática que más claramente ha llamado la atención sobre este peligro, para este filósofo la asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

5.2. Procesos de particularización y de generalización

Los procesos de particularización-generalización, en el EOS, están asociados a la faceta extensivo-intensivo. Los términos extensivo e intensivo están sugeridos por las dos maneras de definir un conjunto, por extensión (un extensivo es uno de los miembros del conjunto) y por intensión (se consideran todos los elementos a la vez). Por tanto, por extensivo entendemos un objeto particularizado (individualizado) y por intensivo una clase o conjunto de objetos, que, a su vez, cuando convenga se puede considerar como un objeto.

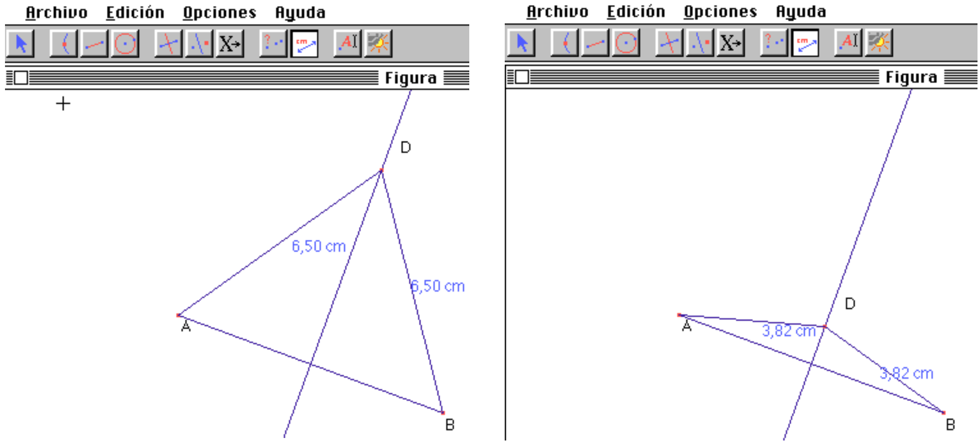
Uno de los orígenes del discurso objetual en matemáticas es la metáfora ontológica, la cual, a su vez, tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos. Esta metáfora permite considerar acontecimientos, actividades, emociones, ideas, etc. como si fueran entidades (objetos, cosas, etc.) o sustancias. Esta metáfora se combina de manera inconsciente con otra metáfora ontológica: la del contenedor (Lakoff & Núñez, 2000). La combinación de dichas metáforas permite considerar ideas, conceptos, etc. como entidades o sustancias que se contienen unas a otras. Dicho de otra manera, uno de los orígenes de la aplicación de la faceta extensivo-intensivo a los objetos matemáticos son las metáforas de tipo ontológico.

Las metáforas ontológicas en el discurso escolar muchas veces suelen estar implícitas, pero también se pueden presentar de manera más explícita. Por ejemplo, en el *Curso de Geometría* de P. Puig Adam (1965, pág. 4) se observan claramente en los axiomas de existencia y enlace:

> *Ax. 1.1 - Reconocemos la existencia de infinitos entes llamados <<puntos>> cuyo conjunto llamaremos <<espacio>>.*
>
> *Ax. 1.2 - Los puntos del espacio se consideran agrupados en ciertos conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<planos>> y los de cada plano en otros conjuntos parciales de infinitos puntos llamados <<rectas>>.*

Los mecanismos que nos ofrece el lenguaje para permitir la particularización o individuación de objetos matemáticos son variados (por ejemplo, los deícticos gramaticales: éste, ése, aquel, ahí, allí, acá, etc. o los determinativos indefinidos: uno, alguno, cualquiera, etc.). También son variados los procesos de generalización (o abstracción) que permiten obtener intensivos. A continuación, vamos a centrar nuestra atención sobre estos últimos. Para ello, volveremos sobre la tarea propuesta en el apartado 2.

Para responder a la tarea, una vez realizada con el ordenador la construcción de la Figura 2, el punto D se puede convertir en un objeto variable, es decir, en un objeto particular dinámico. Basta situar el puntero del ratón en el punto D y moverlo. El invariante que obtiene el alumno al mover el punto D es que este punto siempre cumple la condición de estar a igual distancia de los extremos A y B del segmento. Por lo tanto, la recta perpendicular que pasa por el punto medio del segmento es la recta formada por todos los puntos que están a igual distancia de los extremos.



Figuras 6 y 7. Invariantes de las acciones.

Este resultado se puede simbolizar de la siguiente manera: los puntos de la mediatriz cumplen la siguiente condición: distancia *AD* = distancia *DB*.

La resolución de la tarea permite la emergencia de "intensivos" (por ejemplo, una nueva definición de la mediatriz). Ahora bien, lo que es importante es observar que esta emergencia es el resultado de una abstracción diferente a la empírica, a saber, de una abstracción "reflexiva" (en términos de Piaget). Se trata de un proceso que, a partir de la reflexión sobre el sistema de acciones y su simbolización, llega a encontrar relaciones invariantes y las describe simbólicamente. Esto quiere decir que, en este proceso, determinadas propiedades y relaciones son señaladas y la atención se focaliza sobre ellas, lo cual pone de manifiesto que ganan un cierto grado de independencia respecto de los objetos y situaciones con los que inicialmente están asociados. Este tipo de abstracción produce un resultado que aparece a partir de la acción y que gana sentido y "existencia" a partir de ella. Hay que destacar que se llega a un intensivo (lo que no varia) a partir de (1) ignorar aspectos de lo concreto (lo que varia) y (2) de considerar que lo que es válido para un objeto (variable en esta caso, puesto que estamos trabajando con un programa dinámico) es válido para todos, es decir se razona con elementos genéricos (dinámicos en este caso). En el siguiente apartado volveremos sobre este aspecto.

Una de las características de la abstracción reflexiva es que es constructiva, en el sentido que construye intensivos a partir de la reflexión sobre la acción. Ahora bien, podemos considerar otros mecanismos diferentes para obtener intensivos, uno de tipo eliminativo y otro de tipo aditivo. La abstracción empírica funciona por medio de un mecanismo eliminativo, se trata de eliminar o separar aspectos o notas de lo concreto. Por ejemplo, en la Figura 3 se puede considerar que tenemos un ejemplar del tipo "negro" ya que se trata de una figura de color negro o bien considerar que los puntos A, B y el punto medio, el segmento AB y la recta tienen en común que son figuras geométricas, es decir en todos los casos se trata de ejemplares del tipo "figura geométrica". En este caso, se llega a un intensivo por la aplicación básicamente de la relación tipo/ejemplar, la cual se basa en la aplicación de un mecanismo de tipo eliminativo en base a la relación parte/todo, es decir el intensivo (tipo) se considera una de las partes que componen el extensivo (todo), ya que éste último es un ejemplar concreto que tiene muchas notas o atributos diferentes.

Otro mecanismo diferente para obtener intensivos consiste en la reunión en un mismo conjunto de diversos elementos. Por ejemplo, puedo considerar la mediatriz de la Figura 3 como un miembro (un extensivo) que forma parte de una clase o conjunto (un intensivo). En este último caso se llega a un intensivo también por la relación parte/todo, pero entendida de manera inversa a como se entiende en el caso de la abstracción empírica, la parte (el extensivo) es un miembro de un todo, una clase (el intensivo).

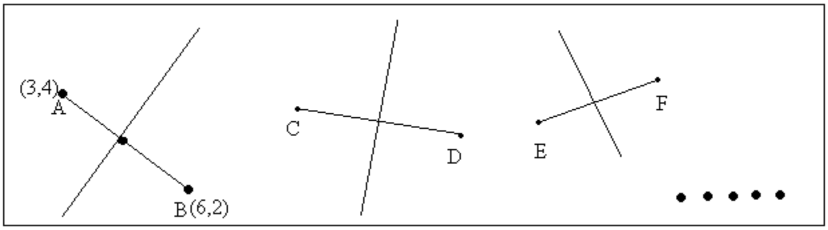


Figura 8. Conjunto de todas las mediatrices.

Estas tres maneras de generar intensivos juegan un papel diferente en las matemáticas, la abstracción eliminativa y la constructiva tendrían que ver, sobre todo, con el "contexto de descubrimiento", mientras que la abstracción aditiva se relaciona, sobre todo, con el "contexto de justificación", puesto que esta última es la usada habitualmente en la presentación formalista de las matemáticas que se fundamenta sobre la teoría de conjuntos.

6. Elementos genéricos y dualidad extensivo / intensivo

Volvamos a la Figura 2 de la tarea que sirve como contexto de reflexión. La principal función que cumple la Figura 2 es (a) introducir un caso particular (variable en este caso) sobre el cual razonar. Una de las características cruciales de la actividad matemática es el uso de elementos genéricos. El razonamiento matemático, para ir de lo general a lo general, hace intervenir una fase intermedia que consiste en la contemplación de un objeto individual. Este hecho plantea un grave dilema: si el razonamiento se ha de aplicar a un objeto concreto, es preciso que se tenga alguna garantía de que se razona sobre un objeto cualquiera para que quepa justificar la generalización en la que termina el razonamiento.

Ahora bien, con relación al elemento genérico hay que considerar tres cuestiones conexas pero distintas, a saber:

- ¿Por qué se hace intervenir en la demostración de una proposición matemática (el enunciado de una definición, etc.), una fase intermedia que se refiere a un objeto particular?
- ¿Cómo es posible que un razonamiento en que intervenga semejante fase intermedia pueda, pese a ello, dar lugar a una conclusión universal?
- El elemento particular normalmente forma parte de una cadena en la que los eslabones anteriores son elementos genéricos. A su vez, el elemento particular al ser considerado como genérico se convertirá en el eslabón previo de un nuevo caso particular y así sucesivamente.

La faceta extensivo/intensivo resulta un instrumento esencial para analizar la complejidad asociada a estos tres aspectos. Dicho de otra manera, el uso del elemento genérico lleva asociada una compleja trama de funciones semióticas (y por tanto, de representaciones) que relacionan intensivos con extensivos.

Cuando en las prácticas matemáticas utilizamos elementos genéricos estamos actuando sobre un objeto particular, pero nos situamos en un "juego de lenguaje" en el que se entiende que nos interesan sus características generales y que prescindimos de los aspectos particulares. Para conocer los detalles sobre las características de este juego del lenguaje, y de las dificultades que tienen los alumnos para participar en él, es necesario el análisis de diálogos entre profesores y alumnos relacionados con el uso de elementos genéricos. La asimilación (o no) de las reglas de este juego de lenguaje es fundamental para que los alumnos puedan convivir con la complejidad semiótica asociada a las prácticas en las que interviene el elemento genérico. A partir del estudio de dichos diálogos, en Contreras, Font, Luque y Ordóñez (2005) y Font y Contreras (2008) se ponen en juegos otros constructos del EOS, los cuales permiten que la "complejidad semiótica" asociada al uso de elementos genéricos se concrete en una trama de funciones semióticas (dualidad expresión-contenido) que relacionan objetos que pueden ser extensivos o intensivos (dualidad extensivo-intensivo).

7. Relación entre procesos: El caso de la representación

Al considerar los procesos de materialización e idealización hemos visto como no pueden ser analizados sin tener en cuenta otros de los procesos contemplados en la Figura 1 (como mínimo el de representación). Una de las maneras de estudiar esta relación en el EOS consiste es situar el proceso que nos interesa primero en el centro del hexágono para relacionarlo con los procesos de comunicación, enunciación, definición, argumentación y algoritmización y, segundo, colocarlo en el centro del decágono y analizarlo utilizando las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales. A continuación, por cuestiones de espacio, aplicaremos sólo las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales al proceso de representación siguiendo a Godino y Font (2010).

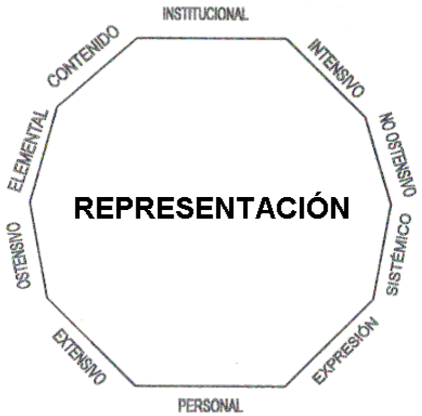


Figura 9. Miradas duales al proceso de representación.

7.1. *La representación con relación a la dimensión dual "extensivo / intensivo"*

El proceso de representación está relacionado con los procesos de particularización y generalización asociados a la dualidad extensivo-intensivo ya que, constantemente, nos empeñamos en descomponer de alguna manera la realidad en una multiplicidad de objetos identificables y discriminables, a los que nos referimos mediante términos singulares y generales (esta silla, una mesa, la letra equis de la pizarra, la función $f(x) = 3x + 2$, etc.). Sobre estos objetos actúa (de entrada) *la faceta extensivo / intensivo*.

Las explicaciones que se pueden dar para justificar la activación de dicha faceta son diversas. Por ejemplo, un foucaultiano diría que estos objetos ya han sido "*dichos desde algún discurso*", mientras que desde la filosofía de la ciencia se dirá que "*toda percepción (observación) está cargada de teoría*" ya que todo juicio de percepción supone la aplicación de conceptos (la proposición *A* es *B*). Desde la teoría contemporánea de la metáfora (Lakoff & Núñez, 2000) se dirá que uno de los orígenes de la aplicación de la dualidad extensivo/intensivo son las metáforas ontológicas, las cuales, a su vez, tiene su origen en nuestras experiencias con objetos físicos.

7.2. *La representación con relación a la dimensión dual "expresión-contenido"*

Para poder aplicar la faceta extensivo-intensivo a los objetos, estos necesitan un signo que los enuncie (acompañe). Imaginemos que un bebé ha balbuceado algo parecido a "pan". La madre interpreta que quiere "pan" y se lo proporciona al mismo tiempo que le dice "pan". El bebé recibe dos estímulos que se refuerzan mutuamente: (1) por una parte, la emergencia del objeto físico "pan" y (2) por otra parte, la palabra "pan" dicha por el mismo y por su madre.

Si bien puede ser que los niños pequeños no hagan la diferenciación entre signo y objeto, las personas adultas diferencian entre signo y objeto:

> Un signo, o *representamen*, es algo que está para alguien, por algo, en algún aspecto o disposición. (Peirce, *Collected Papers*, 2.228)

Puesto que tanto el "signo" como el "objeto" son "algo", hay que tener presente que ambos son objetos. Ser objeto o signo es algo relativo. Por tanto, conviene distinguir entre los objetos y los signos. Es una distinción importante, ahora bien es una diferencia coyuntural y no sustancial, ya que lo que en un momento es signo en otro puede pasar a ser objeto y viceversa. Si bien en la fase de "no diferenciación" el sujeto identifica (confunde) el signo con el objeto, en la fase de "diferenciación" el sujeto está en condiciones, según convenga, de identificar o diferenciar el signo del objeto:

> Estar en lugar de, es decir, situarse en una relación tal respecto a otro que, para ciertos fines, puede considerársele, en algún modo como si fuese ese otro. (Peirce, *Collected Papers*, 2.273)

La posibilidad de diferenciar entre signo y objeto permite que "alguien" pueda establecer una relación diádica (función semiótica) entre "dos objetos" ("algo" por "algo"). En esta relación ("algo" por "algo") normalmente se considera que uno de los objetos (el signo) es una "expresión" que se relaciona con un "contenido" (el otro objeto).

En el EOS se considera que la actividad matemática y los procesos de construcción y uso de los objetos matemáticos se caracterizan por ser esencialmente relacionales. Los distintos objetos no se deben concebir como entidades aisladas, sino puestas en relación unos con otros. La distinción entre expresión y contenido nos permite tener en cuenta el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática. La relación se establece por medio de funciones semióticas, entendidas como una relación entre un antecedente (expresión) y un consecuente (contenido) establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o código de correspondencia.

Godino y Batanero (1998), conciben una función semiótica, al menos metafóricamente, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Los objetos inicial y final están constituidos por cualquier objeto matemático. En el EOS, las funciones semióticas relacionan dos objetos que pueden ser materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de Peirce a Schütz pasando por Husserl. La interpretación de las funciones semióticas que propone el EOS generaliza de manera radical la noción de representación usada en las investigaciones cognitivas realizadas en educación matemática.

7.3. La representación con relación a las dimensiones duales “ostensivo – no ostensivo” y “personal – institucional”

Si nos formulamos la pregunta: ¿Cómo se relaciona el signo con el objeto? topamos con el problema de la clasificación entre representaciones internas y externas. En el triángulo de la figura siguiente se considera que el signo escrito “reloj” se relaciona con el objeto físico “reloj” por medio del concepto (interpretante) que tiene el sujeto (el interprete).

Normalmente se considera que tanto el concepto como el signo son representaciones. También se considera que la palabra escrita “reloj” es una representación externa y que el concepto es una representación interna (mental).

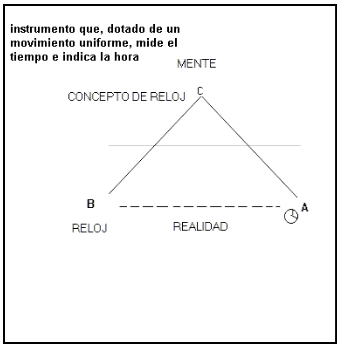


Figura 10. Relación entre signo y el objeto.

Esta primera clasificación en *representaciones mentales o internas* y *representaciones externas* no es en absoluto una clasificación transparente. El motivo es que los objetos matemáticos se representan en los libros, pizarras, etc. por sistemas matemáticos de signos con soporte material que forman parte del mundo real, y, puesto que se presupone que el sujeto se relaciona con el mundo real por medio de representaciones mentales, resulta que lo que se ha considerado como externo en cierta manera también es interno. La ambigüedad de la clasificación interna/externa ha sido señalada por diversos investigadores. Por ejemplo, Kaput con relación a esta clasificación se pregunta:

> ¿Qué es una representación mental? ¿Qué se quiere decir cuando decimos que “representa” a algo? ¿Para quién? ¿Cómo? ¿Cuál es la diferencia entre la experiencia de una representación interna y la correspondiente a una representación externa? ¿Una representación externa es un sistema constituido social o personalmente. (Kaput, 1998, p. 267)

En el EOS se considera que la dualidad interno/externo no da cuenta de la dimensión institucional del conocimiento matemático, confundiendo en cierto modo dichos objetos con los recursos ostensivos que sirven de soporte para la creación o emergencia de las entidades institucionales. Esto tiene consecuencias graves para entender los procesos de aprendizaje, ya que no se modeliza adecuadamente el papel de la actividad humana y la interacción social en la producción del conocimiento matemático y en el aprendizaje. En el enfoque ontosemiótico la clasificación interna/externa, además de problemática, se considera poco operativa y por ello se propone reconvertirla en dos dualidades o atributos contextuales que se consideran más útiles. Nos referimos a las dualidades ostensivo-no ostensivo y personal-institucional.

La distinción ostensivo – no ostensivo se ha de tomar en sentido intersubjetivo: "algo" se puede mostrar a otro directamente versus "algo" no se puede mostrar directamente, solamente por medio de otro "algo", que si se puede mostrar directamente. Cuando se distingue entre los objetos matemáticos y sus representaciones, se considera a dichos objetos como no ostensivos. Ahora bien, cualquiera de estos objetos tiene también una faceta ostensiva, esto es perceptible, ya que se usan en las prácticas por medio de sus ostensivos asociados.

Mediante el lenguaje ostensivo se "expresan" otros objetos no ostensivos. En principio las entidades lingüísticas se muestran por sí mismas directamente a nuestra percepción (escritura, sonido, gestos). A su vez, las entidades no ostensivas necesitan a éstas entidades ostensivas para su constitución y funcionamiento. El lenguaje viene a ser el medio por el cual no sólo se expresan los no ostensivos, sino también es instrumento para su constitución y desarrollo. Por ello, en el enfoque ontosemiótico el lenguaje es considerado como la faceta ostensiva de los objetos matemáticos.

Un caso especial será las entidades lingüísticas que sólo tendrían, en una primera aproximación, la faceta ostensiva. No obstante, desde el punto de vista del sujeto individual, los objetos lingüísticos pueden ser pensados. Tales objetos mentales constituyen la faceta no ostensiva de los ostensivos lingüísticos.

Dependiendo del juego de lenguaje en que nos posicionemos, una misma expresión, por ejemplo "derivada", puede referirse a un objeto personal o institucional. Si se trata de los objetos que intervienen en las prácticas que realiza un sujeto individual para resolver una actividad escolar, se entiende que se trata de un objeto personal. Por el contrario, si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase, se considera que se ponen en juego objetos institucionales.

En el proceso de instrucción estamos interesados en la enseñanza de objetos institucionales. Estos objetos se presentan en la actividad matemática por medio de sus ostensivos asociados. Como resultado del proceso de instrucción los alumnos habrán construido sus objetos personales, los cuales se presentaran en su actividad matemática también por medio de ostensivos asociados.

7.4. La representación con relación a la dimensión dual “elemental-sistémico”

Una de las posibles maneras de concebir el significado de una palabra es considerarlo como la abstracción o el universal que se asocia a esa palabra. A su vez, las cosas designadas por el término se consideran ejemplificaciones de ese mismo universal, o a la inversa, éste constituye la esencia de aquel. De esta manera, las palabras y las cosas quedan relacionadas a través de un tercer reino poblado de esencias y significados. Esta concepción, que se puede considerar platónica, se considera en el enfoque ontosemiótico como una manera “elemental” de plantear el problema. Desde este punto de vista, para especificar lo que una cosa es, su esencia, es necesario enumerar sus cualidades o los universales que ejemplifica.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde este nuevo punto de vista, conocer las cualidades de un objeto equivale a conocer su comportamiento posible, o sea, el conjunto de relaciones predicables de él. Desde esta perspectiva el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con dicho objeto matemático. Se trata de una perspectiva “sistémica” ya que se considera que el significado de un objeto es el conjunto de prácticas en las que dicho objeto es determinante para su realización (o no).

Basta mirar con una perspectiva histórica un objeto matemático cualquiera para ilustrar la complejidad de las relaciones que se establecen entre: (1) un objeto matemático, (2) sus ostensivos asociados, (3) las prácticas que permiten manipular estos ostensivos y (4) las situaciones en las que se usa el objeto (juntamente a sus ostensivos y prácticas asociadas) para organizar fenómenos – por ejemplo, en Font y Peraire (2001) se hace este estudio para la cisoide. Esta mirada histórica también muestra que las diferentes formas ostensivas que pueden representar a un objeto matemático son el resultado de una larga evolución en la que, en algunos casos, una nueva forma de representación plasma un nuevo programa de investigación. Este hecho tiene implicaciones importantes. A continuación indicaremos tres que se consideran de las más relevantes:

(1) La primera es que las representaciones ostensivas no se pueden entender de manera aislada:

> Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen estructura, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras. (Goldin & Stheingold, 2001, p. 2)

Por este motivo más que hablar de representaciones ostensivas o de signos es conveniente hablar de sistemas de signos.

(2) La segunda es que el hecho de que el mismo objeto se pueda encuadrar en dos programas de investigación diferentes, cada uno con sus sistemas de

representación, conlleva que "cada representación" se pueda convertir en "objeto representado" de la representación del otro programa de investigación.

(3) La tercera es que una representación ostensiva, por una parte, tiene un valor representacional: es algo que se puede poner en lugar de algo distinto de él mismo y, por otra parte, tiene un valor instrumental: permite realizar determinadas prácticas que con otro tipo de representación no serían posibles. El aspecto representacional nos lleva a entender la representación de una manera *elemental* "algo" por "algo". En cambio, el valor instrumental nos lleva a entender la representación de una manera *sistémica*, como el "iceberg" de un sistema complejo de prácticas que dicha representación posibilita.

En el enfoque ontosemiótico, la introducción de la dualidad elemental-sistémica permite reformular la visión "ingenua" de que "hay un mismo objeto con distintas representaciones". Lo que hay es un sistema complejo de prácticas en las que cada uno de los diferentes pares objeto/representación (sin segregarlos) posibilita un subconjunto de prácticas del conjunto de prácticas que son consideradas el significado del objeto. Dicho de otra manera, el objeto considerado como emergente de un sistema de prácticas se puede considerar como único y con un significado holístico. Pero, en cada subconjunto de prácticas el par objeto/representación (sin segregar) es diferente, en el sentido de que posibilita prácticas diferentes.Si bien las reflexiones anteriores permiten una visión holística sobre el proceso de representación, es evidente que con ellas no abarcamos toda la complejidad de este proceso. Para una mayor profundización remitimos al lector al trabajo de Font, Godino y D'Amore (2005) en el que se reflexiona sobre la naturaleza y diversidad de objetos que desempeñan el papel de representación y de objetos representados en la actividad matemática. En este trabajo se muestra como los instrumentos teóricos elaborados por el EOS permiten afrontar la siguiente problemática: 1) La naturaleza de los objetos que intervienen en la representaciones; 2) La distinción entre representaciones internas y externas; 3) El problema de la representación del elemento genérico; 4) El papel que desempeñan las representaciones de un mismo objeto en su emergencia; 5) Procesos de comprensión y su relación con la traducción entre diferentes representaciones.

8. Otros procesos: El caso de la metáfora

Es evidente que los procesos contemplados en la Figura 1 no agotan todos los procesos que intervienen en la actividad matemática. Para poner un solo ejemplo, que claramente está presente en la tarea que estamos utilizando como contexto de reflexión, vamos a considerar los procesos metafóricos. Si observamos la Figura 2 vemos que es fácil que el alumno entienda que el punto D va cambiando de posición, en lugar de entender que son puntos diferentes (esto se facilita por el hecho de que el programa Cabri mantiene siempre el mismo símbolo, la letra "D"). El alumno puede estructurar esta tarea en término de sus experiencias corporales y de movimiento, por ejemplo puede considerar que la línea recta es como una carretera por la que se desplaza un coche (el punto D), en este caso habría funcionado una metáfora conceptual del tipo "grounding" en la terminología de Lakoff y Núñez (2000), es decir una metáfora conceptual que relacionan un dominio (de llegada) dentro de las matemáticas con un dominio (de partida) fuera de ellas.

Acevedo, Font y Bolite Frant, en diversos trabajos, han estudiado las metáforas en el discurso del profesor y en el de los alumnos aplicado al caso de la representación gráfica de funciones. En Font (2000 y 2001), Font y Acevedo (2003) y Bolite, Acevedo y Font (2005) se responde a las cinco preguntas siguientes: 1) ¿Cuáles son las diferentes metáforas que se han utilizado históricamente para organizar el conocimiento sobre las gráficas de las funciones?, 2)¿Qué tipo de metáforas utiliza el profesor al explicar la representación gráfica de funciones en el Bachillerato?, 3) ¿Es consciente el profesor del uso que ha hecho de las metáforas en su discurso y hasta qué punto las tiene controladas?, 4) ¿Qué efecto producen estas metáforas sobre los alumnos? Y 5) ¿Qué papel juega la metáfora en la negociación de significados? En Acevedo, Font y Bolite Frant (2006) se realiza una reflexión teórica cuyo objetivo es situar la metáfora con relación a las cinco facetas duales contempladas en el enfoque ontosemiótico (expresión-contenido, institucional-personal, elemental-sistémica, extensivo-intensivo y ostensivo-no ostensivo). Para ello, utilizan como contexto de reflexión el objeto matemático "función" y, más en concreto, su representación gráfica.

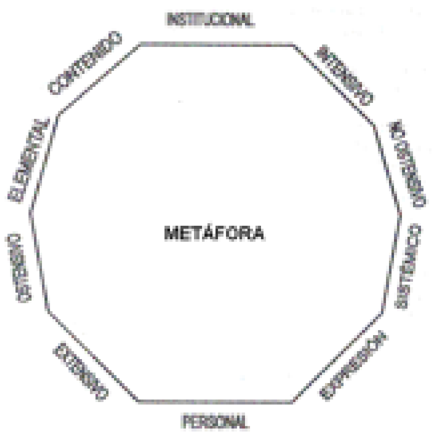


Figura 11. Miradas duales al proceso metafórico.

8.1. La metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional"

El caso estudiado, las metáforas relacionadas con las gráficas de funciones, es un buen ejemplo para ilustrar cómo se sitúa la metáfora con relación a la dimensión dual "personal / institucional". Por una parte, la metáfora estática "la gráfica de una función $f(x)$ es el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" se encuentra fosilizada en las matemáticas institucionales y, por otra parte, la metáfora dinámica (la gráfica es la traza de un punto que se mueve sobre la gráfica) es un recurso utilizado por el profesor que resulta determinante en la estructuración de los objetos matemáticos personales de los alumnos. Puesto que las metáforas dinámicas y las estáticas estructuran de manera diferente a la gráfica de una función es necesario preguntarse por el tipo de coexistencia que se produce entre ambas, enmarcando esta pregunta en la dimensión dual "personal / institucional".

A partir de un análisis histórico, la respuesta es que, más que coexistencia en el plano institucional, lo que se observa es que hay períodos en los que una domina a la otra, siendo la metáfora estática conjuntista la que domina actualmente. En los objetos matemáticos institucionales actuales la metáfora conjuntista es la dominante, incluso se puede decir que casi no hay cabida para las dinámicas. Más que una combinación de metáforas que da lugar a una fusión conceptual tenemos la desaparición de una a manos de la otra. Aunque las metáforas dinámicas y las estáticas son claramente diferentes tienen ciertas implicaciones comunes. Por ejemplo, ambas permiten distinguir entre gráfica y punto. Este hecho hace que un profesor experto las pueda manejar de manera coherente, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas. Por ejemplo, en el caso del dominio de una función que sea un intervalo cerrado, si suponemos que el extremo del intervalo se mueve hasta llegar al otro extremo se obtiene un conjunto que es el dominio de la función.

Si nos preguntamos por la coexistencia de ambos tipos de metáfora en el proceso de instrucción, se observa una mayor presencia de las metáforas dinámicas.

Si nos preguntamos por al coexistencia en el plano personal, se constata que el uso de metáforas dinámicas en el discurso del profesor produce efectos significativos en la estructura del significado personal de los alumnos que pueden llegar a ser, en muchos alumnos, dominantes sobre los efectos que produce la metáfora conjuntista. Mientras que un profesor experto puede manejar de manera coherente las dos metáforas, siempre que supedite las dinámicas a las estáticas, hay alumnos que no logran hacerlo. Esta falta de coherencia es una de las causas importantes de conflictos semióticos relacionados con la representación gráfica de funciones.

8.2. La metáfora con relación a la dimensión dual "extensivo / intensivo"

Una objeción importante que se puede poner a la afirmación de que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora estática, consiste en afirmar que no se trata de una metáfora sino de una relación de tipo extensivo-intensivo. Esto es, afirmar que la gráfica es un ejemplo de conjunto y que no hay ningún tipo de metáfora, se trata simplemente de una subcategorización.

Se trata de una objeción importante ya que en muchos casos no podemos distinguir una metáfora de una subcategorización. En el caso de las gráficas de funciones sólo un análisis histórico permite afirmar que "entender la gráfica de una función $f(x)$ como el conjunto de puntos cuyas coordenadas son $(x, f(x))$" es una metáfora que se ha convertido con el tiempo en una subcategorización.

Lakoff y Johnson (1991) consideran que tanto la subcategorización como la metáfora tienen una estructura del tipo A es B y que ambas son los puntos extremos de un continuum único. En el caso de algunas metáforas es muy claro que A y B son muy diferentes y nos situamos en un extremo de este continuum, mientras que en la subcategorización A se considera un extensivo de un intensivo B y también es claro que nos situamos en el otro extremo del continuum. Pero cuando no está claro si A y B son muy diferentes o bien si se pueden relacionar como extensivo e intensivo, entonces la relación A es B cae en algún punto de la mitad del continuum. Por otra parte, metáforas que en el momento de su aparición se situaban claramente en un extremo del continuo con el paso del tiempo se han convertido en subcategorizaciones situadas en el otro extremo. En Font (2007) se ilustra este proceso de fosilización para una de las metáforas más fructíferas en la historia de las matemáticas: la interpretación de las curvas del plano como conjunto de puntos que son solución de una ecuación.

8.3. La metáfora con relación a la dimensión dual "expresión-contenido"

Con relación a la dimensión expresión contenido la metáfora actúa de manera icónica (Otte, 2001), puesto que una representación icónica, además de representar al objeto, nos informa de la estructura de dicho objeto. Una nueva metáfora (A es B') es una expresión que permite entender los elementos de B (partimos previamente de la relación extensivo / intensivo A es B) como elementos de B'. Es decir, A es B' permite estructurar los elementos A de B en términos de B'. Dicho de otra manera, la metáfora dota de una nueva estructura a B. Visto de esta manera la expresión A es B' se puede considerar que funciona de manera icónica con respecto al contenido B.

8.4. La metáfora con relación a las dimensión dual "elemental / sistémica

Si bien la metáfora se presenta de manera elemental (A es B), el hecho de que ahora B estructure A permite aplicar a A un conjunto de prácticas que son el significado de B. Dicho de otra manera, la metáfora es una manera compacta de generar un sistema complejo de nuevas prácticas.

La dualidad elemental-sistémica en el caso de la metáfora ha sido puesta de manifiesto por diferentes autores. Según Black (1966) cuando usamos una metáfora tenemos en una sola expresión dos pensamientos de cosas distintas en actividad simultánea. El significado de la expresión metafórica sería el resultante de la interacción de los dos elementos. En “Juan es una roca” los dos pensamientos activos a la vez serían el de la fortaleza de Juan y el de la de solidez de la roca. Para Black los dos elementos vendrían a ser uno, el foco de la metáfora – el enunciado efectivo – y otro, el marco que lo rodea. Este segundo elemento ha de ser considerado como un sistema más que como una cosa individual. Cuando decimos que “la sociedad es un mar”, estamos poniendo delante de nuestros ojos, proyectando sobre la sociedad, todo un sistema conceptual en el que hay tempestades, puertos seguros, piratas, tiburones, naufragios y muchas cosas más.

En los trabajos de Lakoff y Núnez (2000) la dualidad elemental-sistémica también ocupa un lugar central. Por una parte, la metáfora es elemental (*A* es *B*), pero, por otra parte, nos permite generar un nuevo sistema de prácticas (perspectiva sistémica) como resultado de la comprensión del dominio de llegada en términos del dominio de partida. Lakoff y Núñez desarrollan la dualidad elemental sistémica para diferentes metáforas. Valga como ejemplo la metáfora del contenedor, la cual, según Núñez (2000), es una metáfora que se usa para estructurar la teoría de clases. Para este autor se trata de una metáfora ontológica inconsciente que tiene sus raíces en la vida cotidiana (Núñez, 2000, p. 13):

- Elemental: “Las clases son contenedores”
- Sistémica: (Tabla 2).

De hecho, la mayoría de las investigaciones sobre la metáfora se han dedicado principalmente al estudio de dicha dualidad. Por ejemplo, en Bolite y otros (2004), siguiendo el modelo propuesto por Lakoff y Núñez (2000), se considera primero la metáfora elemental “los puntos son objetos físicos”.

A continuación se descompacta el dominio de partida (los objetos físicos) y el dominio de llegada (los puntos) para ver que relaciones, prácticas, etc. del dominio de partida se trasladan al dominio de llegada:

- Elemental (*A* es *B*): “Los puntos son objetos físicos”
- Sistémica: (Tabla 3).

Tabla 2
Mirada sistémica a la metáfora "Las clases son contenedores"

Dominio de partida **Esquema del contenedor**	Domino de llegada **Clases**
Interior del contenedor	Clase
Objetos dentro del contenedor	Miembros de la clase
Ser un objeto del interior	La relación de pertenencia
Un interior de un contenedor dentro de uno más grande	Una subclase de la clase más grande
Superponer el interior de dos contenedores	Intersección de dos clases
La totalidad de los interiores de dos contenedores	La unión de clases
El exterior de un contenedor	El complementario de la clase

Tabla 3
Mirada sistémica a la metáfora "Los puntos son objetos físicos"

Dominio de partida	Dominio de llegada
Un cuerpo físico en el espacio	Un punto en el plano cartesiano
Un coche moviéndose a lo largo de una trayectoria	Un punto que se "mueve" sobre una curva que representa a una función real
Un coche que atraviesa un túnel es el mismo cuando entra que cuando sale	Un punto que se mueve a lo largo de una curva es siempre el mismo
La trayectoria representa el movimiento	La gráfica de la pizarra es la trayectoria del punto

8.5. La metáfora con relación a las dimensión dual "ostensivo / no ostensivo"

Con relación a la dimensión dual "ostensivo / no ostensivo" la metáfora actúa en ambos niveles ya que por una parte se presenta de manera ostensiva en los textos o en el discurso oral y, por otra parte, puede ser generada y utilizada mentalmente por los sujetos permitiendo la realización de inferencias.

9. Consideraciones finales

El trabajo que se presenta pretende ser un aporte teórico que hay que enmarcar en la perspectiva del desarrollo del EOS ya que se afronta la problemática del encaje de los "procesos" dentro del marco teórico.

En este trabajo hemos mostrado como el uso del constructo "configuración epistémica de objetos matemáticos" conjuntamente con determinados procesos matemáticos considerados en el EOS permite un mejor análisis de las prácticas matemáticas. La herramienta "configuración epistémica" resulta útil para describir de manera estática la estructura (organización, configuración, anatomía, etc.) de un texto matemático, mientras que los procesos son herramientas que permiten profundizar en el análisis del funcionamiento (dinámica, fisiología, etc.) de la configuración epistémica activada en la realización de la práctica matemática.

Otra de las aportaciones de este trabajo consiste en una profundización sobre lo que se entiende por materialización-idealización y por particularización-generalización en el marco del EOS. Se han considerado tres maneras diferentes de generar intensivos, cada una de las cuales juega un papel diferente en las matemáticas. La abstracción eliminativa y la constructiva tendrían que ver, sobre todo, con el "contexto de descubrimiento", mientras que la abstracción aditiva se relaciona, sobre todo, con el "contexto de justificación", puesto que esta última es la usada habitualmente en la presentación formalista de las matemáticas.

Por último queremos destacar que las diferentes miradas que posibilitan las facetas duales de la Figura 1 son una buena manera de analizar la problemática de la relación entre procesos, tal como se ha puesto de manifiesto al analizar los procesos de representación y los metafóricos.

Referencias

Acevedo, J., Font, V., & Bolite Frant, J. (2006). Metáforas y funciones semióticas: El caso de la representación gráfica de funciones. En A. Contreras, L. Ordóñez, & C. Batanero (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Primer Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 384–399). Jaén, Universidad de Jaén.

Black, M. (1966). *Modelos y metáforas*. Tecnos: Madrid.

Bolite Frant, J. et al. (2004). Reclaiming visualization: When seeing does not imply looking. *TSG 28, ICME 10*, Denmark.

Bolite Frant, J., Acevedo, J., & Font, V. (2005). Cognição corporificada e linguagem na sala de aula de matemática: Analisando metáforas na dinâmica do processo de ensino de gráficos de funções. *Boletim GEPEM*, 46, 41–54.

Contreras, A., Font, V., Luque, L., & Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *25*(2), 151–186.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in* Mathematics, *24*(2), 139–162.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivades*. Tesis doctoral. Universitat de Barcelona.

Font, V. (2001). *Expresiones simbólicas a partir de gráficas: El caso de la parábola. Revista* EMA, *6*(2), 180–200.

Font, V. (2007). Cuatro instrumentos de conocimiento que comparten un aire de familia: particular-general, representación, metáfora y contexto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *19*(2), 95–128.

Font, V., & Acevedo, J. I. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor: El caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las*

Ciencias, *21*(3), 405–418.

Font, V., & Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(1), 33–52.

Font, V., & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaço Matematica Pesquisa, 8*(1), 67–98.

Font, V., & Peraire, R. (2001). Objetos, prácticas y ostensivos asociados: El caso de la cisoide. *Educación Matemática*, *13*(2), 55–67.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2005). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. [Versión ampliada del artículo: Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007), An onto-semiotic approach to representations in mathematics education, *For the Learning of Mathematics, 27*(2), 1–7]. Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124.

Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89–105.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., & Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 9*(1), 189–210.

Godino, J. D., & Recio A. M. (1997). Meaning of proofs in mathematics education. *Actas PME XXI* (Vol. 2, pp. 313–320), Lahti, Finland.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.
Disponible en http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education, *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 39(1-2), 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae*. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7–37.

Godino, J. D., Contreras, A., & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39–88.

Goldin, G., & Stheingold, X. (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of* *representation in school mathematics* (pp. 1–23), Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(2), 266–281.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. Oxford: Oxford University Press.

Lakoff, G., & Johnson, M. (1991). *Metáforas de la vida cotidiana*. Madrid: Cátedra.

Lakoff, G., & Núñez, R. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Núñez, R. (2000). Mathematical idea analysis: What embodied cognitive science can say about the human nature of mathematics. En T. Nakaora & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 3–22). Hiroshima: Hiroshima University.

Otte, M. (2001). Epistemologia matemática de un ponto de vista semiótico. *Eduaçao Matemática Pesquisa*, *3*(2), 11–58.

Peirce, C. S. (1931–1958). *Collected papers* (C. Hartshorne, P. Weiss, & A. W. Burks, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Puig Adam, P. (1965). *Curso de geometría métrica. Tomo I. Fundamentos*. Madrid: Nuevas Gráficas.

Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Multiple semiotic means in the use of formative assessment in secondary school mathematics

Paraskevi Michael-Chrysanthou, Theodora Christodoulou,
Iliada Elia and Athanasios Gagatsis
University of Cyprus, Department of Education

Abstract. *The main idea of this contribution is to enhance the knowledge about the use of multiple semiotic means in formative assessment in mathematics teaching. Four teaching episodes of formative assessment situations in mathematics classrooms are discussed, focusing on the use and modifications of multiple semiotic means during formative feedback. Our findings reveal that multiple semiotic means such as gestures and different types of representations are involved during the process of feedback and different semiotic actions, such as treatments and conversions, take place, facilitating the interaction between teacher and students. Also, the type of feedback appears as a factor differentiating the type of semiotic means and semiotic actions.*

Keywords: formative assessment, feedback, semiotic means, treatments, conversions

1. Introduction

Recent international studies (e.g. OECD, 2012; Eurydice, Educational, Audiovisual, & Culture Executive Agency, 2012) have determined five main difficulties in the teaching and learning of mathematics. One of these difficulties refers to the improper use of formative assessment. The role and effectiveness of formative assessment has occupied several researchers of the mathematical community (e.g. Van De Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013; Chappuis & Stiggins, 2002; Black & Wiliam, 1998). Previous research (e.g. OECD, 2005; Broadfoot, Weeden, & Winter, 2002) has highlighted the need for using particular teaching strategies in order to achieve an appropriate and effective use of formative assessment. Based on the role and the purpose of formative assessment (i.e. to improve students' learning and to rehabilitate their difficulties), it seems that this kind of assessment can be beneficial for both the students and the teacher. This is reinforced by the significant impact of feedback provided by students to teachers about what they know and what misconceptions they have (Hattie, 2009) in order to resolve any questions and difficulties about the concept that is taught.

Arzarello, Paola, Robutti, and Sabena (2009) suggest that during the process of mathematics teaching and learning, a diversity of actions is produced both by the students and by the teacher through different semiotic sources. Thus, semiotic means can have an essential role in the formative assessment process also and mainly during the provision of feedback, as different kinds of semiotic systems can co-exist during this process. For instance, gestures, glances, drawings and extra-linguistic means of expression seem to be key components of semiotic activities carried out in class.

In relation to the above, our examination focuses on the contribution of multiple semiotic means in the use of formative assessment in mathematics teaching. More specifically, this study focuses on providing formative feedback during formative assessment and the role of different semiotic means in this process. In particular, we aim to answer the following questions:

1. Which semiotic means are involved during the process of providing formative feedback?
2. What are the interactions and relations between these different semiotic means during formative assessment?

We will try to approach these questions by analyzing teaching episodes from mathematics classrooms, in which the teacher try to engage the students in formative assessment processes, using different techniques and semiotic means for this purpose.

2. Theoretical background

2.1. Procesos de idealización y de materialización

Many definitions have been provided about formative assessment. Recent definitions about this kind of assessment describe formative assessment as a way of assessment which checks who is learning or not and helps teachers design their next lesson (Van De Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013). More specifically, formative assessment is defined as "a process where the teachers gather information about their students' learning and the teaching is modified as a result of the feedback that they provide to their students" (Cauley & McMillan, 2010). The National Council of Teachers of English stress that the results of formative assessment help teachers to make decisions due to the fact that this type of assessment provides information about the difficulties of the students, their misunderstandings in a concept, their strengths and their weaknesses and leads teachers to change their teaching techniques in order to achieve their teaching goals (NCTE, 2010).

Previous definitions about the formative assessment refer to the "assessment that is specifically intended to provide feedback on performance for improving and accelerating learning" (Sadler, 1998). Black and Wiliam (1998) highlight the active role of students in this process, supporting that formative assessment makes students responsible for their learning because they can assess their work, draw conclusions about their learning and plan next steps for further progress. In accordance to this, Harlen (2000) points out that "children have a role in assessment for this purpose since it is, after all, the children who do the learning" (p. 112). That is why many researchers stress that assessment must be formed "for" learning and not "of" learning, as it is generally acknowledged that increased use of formative assessment (or assessment for learning) leads to higher quality learning (Wiliam, Lee, Harrison, & Black, 2004).

A definition that combines many key points about formative assessment is the one proposed by Popham (2008, p. 5), which is accepted by the Formative Assessment for Teachers and Students (FAST) group as the most accessible to educators (Clark, 2011b). According to this definition, formative assessment is "a process used by teachers and students during instruction that provides feedback to adjust ongoing teaching and learning to improve students' achievement of intended instructional outcomes".

2.2. Techniques for formative assessment

Assessment techniques and their effects on the students' learning, but also their emotional aspect have attracted the interest of several researchers (i.e. Crooks, 1988; Black & Wiliam, 1998) in the last decades and many of them suggest different formative assessment techniques, many of which present common points. For example, Cauley and McMillan (2010) report that informal observations and oral questions posed to the students concerning the content being taught or reviewed are two techniques that allow continuous formative assessment. And when the information from the observations and the questions posed to students is accurate, the teacher identifies the instructional adjustments that can help students improve their learning. Cauley and McMillan (2010) emphasize also the technique of providing clear learning goals to the students, explaining that formative assessment is more effective when the students have a clear idea of their teachers' expectations, because giving clear expectations allow students to set realistic and achievable goals.

Clark (2010) provides a richer list of sixteen teaching formative assessment techniques that involve the students in a reflective thinking and problem solving, considering the technique of questions as the most significant one. Feedback provided to students as comments and not as grades, oral feedback to the students, sharing the assessment's criteria with students, peer-assessment and setting learning goals with the students are some of the formative assessment techniques he proposed.

The techniques proposed by Clark (2010) are identified in other researchers too. For example, the General Teaching Council for England (GTCE, 2011) considers the effective use of questioning techniques, the use of marking and feedback strategies, the sharing of learning goals to students and peer and self-assessment by pupils to be key characteristics of formative assessment. Therefore, it seems that there is a general agreement among the various researchers regarding the techniques that are considered important for the effective implementation of formative assessment in teaching of mathematics.

2.3. The effective use of formative feedback

As previously mentioned, in this contribution we emphasize on feedback provided during the formative assessment process in the mathematics classrooms we have observed. Feedback emerges an important dimension of formative assessment, as several definitions of formative assessment highlight the importance of its integration in the teaching. For example, Nicol and Macfarlane-Dick (2004) argue that assessment can be characterized as formative when it generates information for feedback that can be used by students to enhance their learning and their success. This information is useful to teachers in order to adapt their teaching to the needs of their students.

According to different references on feedback, three types of feedback are discriminated. The first type refers to feedback provided by the teacher to the students aiming to help them overcome their difficulties and improve their performance in the particular content they are taught. In this sense, Sadler (1998) refers to formative assessment as a process that seeks to provide feedback on the performance of students in order to improve and accelerate their learning. The second type of feedback refers to the information given by the students to the teacher in order to help him/her to decide how to modify the teaching process for helping students to strengthen their understanding. Actually, Hattie (2009) stresses that a strong influence of formative assessment on the students' performance is achieved by the substantial feedback provided by the students to the teacher regarding their understanding, their mistakes or misconceptions. Furthermore, feedback can be provided not only by the teacher to the students and vice versa, but often peers can provide feedback to each other. For example, in the context of a group work, the students provide their own feedback to their peers, while they cooperate for carrying out the work (Nicol & Macfarlane-Dick, 2004). Therefore, any direction formative feedback gets, it benefits both the students and the teachers.

However, feedback is not always formative, as there are certain factors that determine when it is formative or not. In particular, feedback becomes formative when students are a) involved in a process, which focuses on meta-cognitive strategies, b) are supported in their efforts to reflect upon for their work, c) understand the link between their previous performance, their current understanding and the clearly defined success criteria, and d) are active as responsible of their own learning (Clark, 2011a).

2.4. The use of semiotic means in the teacher-student interaction

In a semiotic approach to mathematical teaching, the role of signs and the way they are adopted by individuals within their social context is central

(Arzarello, Ferrara, Paola, & Robutti, 2005). The term "semiotic" means "theory of signs" (Nöth, 2000). According to Peirce, a sign is anything that "stands to somebody for something in some respect or capacity" (Peirce, 1931-1958). Saussure (1959) defined the "sign" as a combination of two mental constructs: a "signified" together with its "signifier". Sometimes a "signifier" can be arbitrary, as it is related to the "signified" with a social condition (an agreement, a rule). In this case, the observer cannot discover himself the "signified" through the "signifier", as he has to be aware of this social condition. Such kind of optic "signifiers" include the written language, the traffic lights, gestures etc.

Arzarello, Paola, Robutti, and Sabena (2009) claim that during the learning processes in the mathematics class, a variety of semiotic actions and productions are activated by the students and by the teacher using different resources: words (orally or in written form), extra-linguistic modes of expression (gestures, glances), different types of inscriptions (drawings, sketches, graphs), various instruments (from the pencil to the most sophisticated information and communication technology devices) and so on. Such resources can be used with great flexibility, as the same person can exploit many of them simultaneously. Sometimes, they are shared by the students (and possibly by the teacher) and used as communication or thinking tools, with the actions and productions they support to be important for grasping mathematical ideas. In fact, all such resources help to bridge the gap between the worldly experience and the more formal mathematics.

Within this wide perspective, Arzarello (2006) has introduced the "semiotic bundle", which allows studying gestures – and teaching-learning processes – in a multimodal approach. A "semiotic bundle" is a system of signs – with Peirce's comprehensive notion of sign – that is produced by one or more interacting subjects and that evolves in time. Typically, a "semiotic bundle" is made of the signs produced by a student or by a group of students while solving a problem and/or discussing a mathematical question. An important example of "semiotic bundle" is given by the unity speech-gesture. McNeill claimed that gesture and spoken utterance should be regarded as different sides of a single underlying mental process (McNeill, 1992). Gesture and language constitute a "semiotic bundle", made of two deeply intertwined semiotic sets. Researches on gestures have discovered some important relationships between the two, for example match and mismatch has been studied (Goldin-Meadow, 2003).

Thus, an essential aspect of the analysis of gestures is the relationship between the content of gestures and speech. On the one hand, gestures may convey the same information as speech (Arzarello & Edwards 2005), thus reinforcing the speech meaning (Göksun, Hirsh-Paseka, & Golinkoff, 2010). On the other hand, gestures and speech may contain different information. Gestures may provide information that is conflicting to the content of speech, or they may supplement speech by providing additional information. Such a speech–gesture mismatch is seen as an indication for a transitional stage in cognitive development or in mastering a task (Alibali, Kita, & Young, 2000; Goldin-Meadow, 2003).

Elia and Gagatsis (2016) relate Kaputs' definition of representations to the concept of gestures, showing that (iconic) gestures can be considered as semiotic means, as they are in line with this definition. The definition of representations in relation to gestures is the following:

1. The entity which is represented (e.g. two-dimensional geometrical figures)
2. The entity which represents (e.g. diagrams of geometrical figures and gestures)
3. Elements of the entity which is represented (e.g. directions of line segments, vertical lines, parallel lines, intersecting sides etc.)
4. Elements of entity which represents (e.g. gestures representing parallel or vertical lines etc.).
5. Correspondence between 3 and 4 (parallel or vertical lines with the relevant gestures).

Furthermore, based to the previous definition, gesture satisfies also the discrimination of representations to internal and external. In fact, gestures are considered as external representation in close interaction to internal representations. Through gestures we are able to display orally our internal thoughts and the way we understand the world. Thus, gestures can be taken as the "windows" of our internal thoughts or as "pipes" transmitting ideas that are already in our minds and wait for the proper material or verbal expression. In fact, McNeill (1992) proposed four categories of gestures with respect to their meaning: (1) deictic gestures, pointing movements to existing or virtual objects and actions in space; (2) iconic gestures which are closely related to the semantic content of speech, that is, they visually represent the content of concrete entities and actions, (3) metaphoric gestures, which represent an image of an abstract object or idea; (4) temporal highlighting gestures, simple repeated gestures used for emphasis. For our analysis further on, we use this framework for identifying the type of gestures that appear in the teaching episodes we examine and discuss their function during providing feedback.

Besides students, the teacher participates also in this semiotic production, and thus the "semiotic bundle" may include also the signs produced by the teacher (Arzarello, Paola, Robutti, & Sabena, 2009). Furthermore, the process developed by the teacher using semiotic sources in order to strengthen the construction of knowledge is called "semiotic game" (Arzarello & Robutti, 2008; Arzarello & Paola, 2007). In particular, a "semiotic game" takes place when the teacher responds to the semiotic resources that the students produce and then he/she directs the construction of knowledge taking into account these sources (Arzarello, 2006). In fact, the most important mathematical use of semiotic means is their internal potential to be changed into other semiotic means. In order to analyze the cognitive processes underlying any mathematical activity, and problems of students' comprehension in learning mathematics we must carefully distinguish these two types of semiotic change (Duval, 2008). The first produces a semiotic mean of the same type as the starting representation. On the other hand, the second produces a semiotic mean of a different type. They are respectively called treatments and conversions.

In studying a semiotic game between a teacher and a kindergarten student, Elia, Gagatsis and Van den Heuvel-Panhuizen (2004) conducted a case study which explores the function of gestures in a geometrical activity at kindergarten level. In their study, the spontaneous gestures of the child were investigated, as well as the influence of the teacher's gestures on the child's gestures. Actually, the major goal of the study was to unravel the role of gestures in using and communicating spatial and shape related ideas by a kindergarten child that was engaged in an activity requiring the transformation of spatial constructions into verbal descriptions. Their results showed that the child was spontaneously using iconic and deictic gestures throughout the whole activity. These gestures, and primarily the iconic ones, helped her make apparent different space and shape aspects of the constructions she was making. Along with her speech, gestures acted as semiotic means of objectification to successfully accomplish the task. The teacher's gestures were found to influence the child's gestures when describing aspects of shapes and spatial relationships between shapes, as the child was either mimicking or extending the teacher's gestures. Watching and mimicking or extending the teacher's gesture and speech acts helped the child enter into a process of objectification (Radford, Bardini, & Sabena, 2007) for these concepts.

3. Methodology

For answering our research questions, the data collection was conducted through videotaping two consecutive mathematics lessons at lower secondary school, emphasizing at moments of formative assessment. This data collection was included in the actions of a European research project about the use of formative assessment. The Formative Assessment in Mathematics Teaching and Learning (FAMT&L[1]) is a European research project which aims to design a virtual environment (a web repository) for in-service and pre-service teachers' training about the proper use of formative assessment in teaching-learning situations and in elaborating a training model (or methodology) for mathematics teachers training in secondary school. The purpose of this

[1] [538971-LLP-1-2013-1-IT-COMENIUS-CMP]

training model (or methodology) is twofold: to improve teachers' competences a) on educational planning and assessment (both formative and summative assessment; assessment for learning) and b) on mathematics didactics.

This project begins from an investigation of the mathematics teachers' beliefs about formative assessment (Michael-Chrysanthou, Lovece, Vannini, & Gagatsis, 2016; Lovece, Vannini, Michael-Chrysanthou, & Gagatsis, 2016; Michael-Chrysanthou, & Gagatsis, 2015; Michael-Chrysanthou, Gagatsis, & Vannini, 2014) in order to develop model (using e-learning) for middle school math teachers (that can be applied to in-service and pre-service training) and then to conclude a design of an appropriate virtual environment for in-service and pre-service teachers. This learning environment will provide a variety of tools and objects (examples of learning contexts, video of situations of teaching mathematics, assessment tools, training paths and their specific use in the teaching of mathematics), including a guideline to be used in in-service secondary schools teachers training courses. The FAMT&L project is carried out by five partner EU universities: The Alma Mater Studiorum Università di Bologna – Departments of Education and Mathematics, which is the Project Coordinator, the University of Cyprus – Department of Education, the University of Applied Sciences and Arts of Southern Switzerland – Department of Formation and Learning, the Cergy-Pontoise University – University Institute of Teachers Training and the Inholland University of Applied Sciences.

For the purposes of this contribution four teaching episodes from a grade 7 mathematic classroom were analyzed. These episodes were extracted from two consecutive lessons about "*Integers-Rational numbers*" and in particular about the "*Multiplication of Rational number*" and the *"Inverse numbers"*. The learning goals of the lessons were students to be able: a) to estimate the product of numbers with same and different sign, and b) to estimate and find the inverse number of each rational number. In the episodes, the participants are involved in formative assessment situations. In these lessons, the teacher applies the "traffic lights" technique for engaging students in the process of providing them feedback.

Actually, the students use three cards in different colors (green, orange and red) for giving feedback to their teacher regarding their understanding about the content that is taught. The green card represents a good understanding giving the teacher a "green light" to continue the teaching process. The orange card indicates that the students have a question/misunderstanding and they need for additional help. The red card is used by the students that have a poor understanding of the mathematical concept, so that the teacher to explain it again. As each of the cards has its own meaning, we consider the "traffic lights" technique as a semiotic source and the cards as an arbitrary sign, as defined by Saussure. In fact, the traffic lights cards can be taken as an arbitrary signifier, which is related to its signified through a social condition (agreement – rule). Thus, an observant cannot discover himself the signified through the signifier, as it is necessary to be aware of this condition. Therefore, the traffic lights cards, as well as gestures and written language are considered as visual signifiers. Apart from these semiotic means, the use of formative feedback is also carried out in an informal way, through the teachers' oral questions during teaching and students' questions without the use of their cards. These ways are considered to promote the use of formative feedback and the interaction between the teacher and the students and between peers.

The analysis of these didactic episodes is based on Arzarello's and his colleagues (2009) approach of the synchronic analysis and the diachronic analysis. Synchronic analysis enables us to concentrate on the interrelations between different semiotic resources, including gestures and oral language, activated by the subjects (i.e. students and teacher) simultaneously at a specific moment. By implementing diachronic analysis we can identify changes in the way the participants use gestures in relation to verbal representations and other semiotic resources, in successive moments over a short period of time, that is, within a mathematical activity or lessons, over a medium period of time, that is, between consecutive lessons, and over a long period of time, that is, between the different periods the observations will take place within the school year. We consider this approach suitable for analyzing our teaching episodes, as we are interested in tracing the semiotic means (gestures, oral and written language, traffic light cards) involved during the process of formative assessment and the interactions between them, but also in tracking changes in the way these semiotic means are used by the teacher in the two successive lesson we observed.

4. Results

Lesson 1 – Episode 1

In the first episode we first observe a teacher – student interaction, at first during the teachers' effort to provide individualized feedback to a student that appears having difficulties. Then, the teacher opens the discussion to the whole class posing oral questions, in order to engage the rest of the students in the process of providing feedback to the student having difficulties. So, there is an indirect interaction between the students during peer-feedback with the mediation of the teacher.

In particular, during the teacher's discussion with Student 1 (S1), she traced that S1 faced difficulties in multiplying $8\times(-1)/(8)$. In fact, S1 indicated difficulties in realizing that an integer number could be represented as a fraction. So the teacher called him to recall the rule for the multiplication between fractions. In order to help him recall the rule, the teacher used a deictic gesture (Figure 1a) to show a previous example written on the board, for turning John's attention to its solution. Using this deictic gesture that corresponded to her verbal expression, she gave feedback to the student by helping him realizing that the same kind of operations is needed for the previous example and this new example.

After the teacher realized that the particular student needed further feedback for understanding the proper procedure, she tried to apply the peer-feedback technique by posing oral questions for encouraging the rest of the students to help their peer. In helping S1 by explaining the multiplication procedure, Student 2 (S2) suggested they should use a "deletion", referring to simplification. She was, probably, unable to use the proper term, as the term of simplification was new for the students at this moment. However, in the context of a semiotic game, the teacher made a treatment to S2's verbal expression and gave the right mathematical term "simplification". Then, the teacher encouraged students to think how to convert number 8 to a fraction in order to be able to execute the operation. Another student using an informal mathematical language suggested the teacher to "draw a line and below it to write number one". The student used "line" referring to fractional line and the word "below" for the denominator. Then, the teacher converted on the board these verbal expressions into the symbolic representation "8/1".

The same student continued by explaining verbally the procedure of multiplying the two fractions using simplification. At the same time, the teacher was converting S2's verbal explanations into a written symbolic expression on the board, to highlight each step of this procedure. In order to help S2 find the sign of her final answer, the teacher repeated verbally the procedure of multiplication, performing deictic gestures at the same time for pointing at each number or sign she was referring to.

Coming back to S1, the teacher tried to provide him once again individualized feedback, by trying to give him particular advice in order to correct his mistakes. She actually advised him to be more careful at the position of the numbers, when writing a fraction next to an integer. During this effort, the teacher synchronized her verbal explanations to a symbolic form on the board, for visualizing the proper way of representing these numbers. For further stressing this proper way of writing, the teacher then used once again deictic gestures (Figure 1b) synchronized to her speech, for pointing at the right position of each digit of the numbers as appeared in a previous example on the board.

In the semiotic game during the teachers' feedback to students in this episode, conversions of verbal to written symbolic expressions in combination to deictic gestures were evident. Thus, we consider that the teacher used these conversions of representations as a formative assessment tool, for providing feedback to them.

(a) (b)

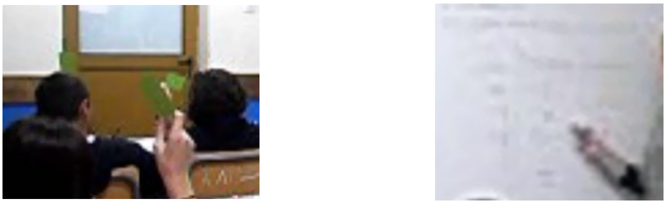
Figure 1. Deictic gesture of teacher about the previous example (a) and deictic gesture of teacher about the proper position of numbers (b).

Lesson 1 – Episode 2

In this episode the teacher asks the students to provide her feedback using their traffic lights cards (Figure 2a) about their understanding regarding the inverse and opposite numbers. Based on the students' reactions using their cards, a teacher-student interaction during the teachers provides feedback to a particular student having difficulties is analyzed.

In particular, the teacher observed a few students displaying an orange card about their understanding. For providing them feedback, she asked them to express their questions about the mathematical content that was still fuzzy to them. A student expressed his difficulties in understanding why the inverse number of $1/3$ is 3. Then, the teacher encouraged him to revise the previous written examples on the board, by posing oral questions to him in order to guide his recall the right procedure. Actually, the teacher asked the student to explain her how the fraction $1/2$ was transformed to the integer 2, by using deictic gestures at the same time for pointing at each number she referred to (Figure 2b). After the student answered that 2 is actually $2/1$, the teacher translated this verbal expression to a symbolic expression on the board by drawing a fraction line and writing the denominator 1 below it. The same procedure followed the teacher's question about what actually number 3 is, by using also a deictic gesture for each number. The student replied that the number 3 is equal to $3/1$ and the teacher converted this answer by writing it on the board. Then, the teacher asked the student about the fraction $1/3$, by using also a deictic gesture for pointing it on the board. In relation to his previous answer, at this moment the student realized that the inverse number of $1/3$ is 3.

Thus, in this episode the teacher tried to help the student overcome his difficulties by recalling previous examples written on the board. Her oral questions, the conversion of the students' oral expression to written symbolic representation on the board and the synchronized form gestures with her verbal expressions were the semiotic means used by the teacher in the semiotic game held in this episode. Therefore, the use of traffic light cards as a semiotic means was a source of feedback for the teacher, who then used a semiotic bundle comprised of oral language, symbolic representations and gestures for providing feedback back to the students. As a result, the interrelation between the different semiotic means observed in this episode was decisive for the teacher – student interaction during providing feedback to each other.



(a) (b)

Figure 2. Traffic light cards for the children understanding about inverse and opposite numbers (a) and teacher's deictic gesture about the numerator and denominator of 1/2 (b).

Lesson 2 – Episode 1

In this episode two phases of teacher-students interaction while providing feedback take place. At the beginning of the episode the teacher asked the students to express any questions they might have about the lesson. She observed no reaction from the students and in keeping trying to gain feedback from them, she urged the students to use their traffic light cards for expressing their understanding about the lesson. The students reacted and raised their cards, so the teacher was able to trace students that still have doubts about the mathematical content of the lesson. These were the students that raised an orange card (Figure 3a). So, the teacher focused on these students and started posing them questions for finding their exact difficulties and being able to provide feedback to them. It is important to stress that, in this case, the use of a semiotic means (the traffic light cards) facilitated the students-teacher interaction, as it enabled the students express the degree of their understanding. This is probably attributed to the fact that when the students who have a question they feel uncomfortable to ask for help in the case the rest of the students don't have any question.

In the first phase of teacher-student interaction during the feedback process, the teacher asked a student with an orange card to describe her difficulties. This student faced difficulties while converting a decimal number into an improper fraction for finding next the inverse number (the student explained that she hasn't understood very well why 2.5 was turned into a fraction). The teacher, instead of answering herself, she transmitted the question to the rest of the students, in order to engage them in a peer-feedback procedure. Then, a second student answered the question, by trying to explain the right procedure. During this students' verbal explanation, the teacher contributed to this semiotic game by making treatments and conversions of the semiotic means produced by the particular student. In fact, the teacher made a treatment of the second student's verbal explanation, by rephrasing her answer and by adding clarifications in order to describe the rule for inverting fractions in a more clear way. After the explanation of the rule, the first student expressed another question she had. After that, the teacher provided feedback directly to the student, by using a deictic gesture to point at a fraction, in order to repeat and stress the rule she mentioned previously ("*We invert only fractions and not decimals*"). Thus, in this phase the teacher at first provides indirect feedback to the students (by enabling other students in providing peer-feedback) through treatments of semiotic means and then provides direct feedback to the students by involving other semiotic means, such as gestures.

At the second phase of teacher-student interaction during feedback, the teacher focused on a second student that expressed his difficulties by raising an orange traffic light card. Specifically, this student had difficulty regarding the inverse number of $-1\ 2/7$. The teacher in order to start providing him feedback, she posed oral questions for guiding him towards the right procedure. At the beginning, she asked the student which is the inverse number of $-1\ 2/7$ and the student replied with a wrong answer ($-1\ 7/2$). The student has actually inverted only the fractional part of the mixed number, without transforming the mixed number to an improper fraction. Then, the teacher made a metaphoric gesture of a circle around the number $-1\ 2/7$, which was previously written on the board, in order to remind and stress the rule that "*we invert the whole mixed number*". In continuing stressing the rule, while explaining that "*for finding the inverse number we inverse the whole fraction*", she used an iconic gesture for showing the action of inverting the denominator with the numerator. A deictic gesture followed in order the teacher to indicate the fractional part of the mixed number ("*You have only inverted the fractional part…"*) and then a temporal highlighting gesture was used for showing the whole mixed number ("*…of the mixed number*"). In this gesture the teacher made a repeated motion of showing each part of the mixed number (the integer and then the fraction) consecutively, in order to help the student realize that these two parts are related and constitute a mixed number. Next, the teacher explains that "*By inverting* $\frac{2}{7}$ *to* $\frac{7}{2}$ *you don't invert the rational number"*), while at the same time she uses a deictic gesture pointing at the denominator (7) and numerator (2) respectively and again a metaphoric gesture of a circle around the number $-1\ 2/7$ in order to show the rational number. Thus, the teacher's blended character gestures were synchronized with her verbal expression.

After providing feedback to the student by explaining the rule, by involving different gestures, the teacher asked the student to explain her again the right procedure. The student answered correctly that "*we first have to turn the mixed number into an improper fraction*" and continued orally to the solution of the task, which was translated to a symbolic representation on the board by the teacher. Therefore, the teacher's semiotic game while providing feedback was found effective, as the student realized his mistake and followed the right procedure.

(a) (b)

Figure 3. Use of traffic cards about the inverse numbers (a) and metaphoric gesture of a circle around the number $-1\ 2/7$ (b).

Lesson 2 – Episode 2

In this episode also, using the traffic lights technique, the teacher encouraged the students to express their difficulties about the rational numbers. In this case many orange cards were observed and less red cards. Based on the students' instant feedback using a semiotic means for expressing their degree of understanding, the teacher decided to modify her teaching and pay more attention at the points the students were still facing difficulties. The students expressed a fuzzy understanding about the inverse numbers of mixed fractions and the conversion of decimals to fractions. Thus, the teacher decided to give some extra tasks on the board and provided students time to solve them individually. After the students finished with the solution of the tasks, the teacher opened the discussion of these tasks, by asking particular students to explain their solutions. The teacher focused mainly on the students that have previously displayed an orange or a red traffic light card. Therefore, in this episode an interaction between the teacher and many students takes place.

At the beginning of the discussion of the solutions with the students, the teacher asked the students to explain their solution. During the students' oral explanations, the teacher was converting them into symbolic representations on the board and was also making treatments of, by expressing orally the meaning in a more correct and completes form. In order to check the effectiveness of feedback the students have received through the discussion of the first two tasks, the teacher asked them once more to express their understanding using their traffic lights cards. From the students' feedback, the teacher was able to trace that the students had still difficulties on how to turn a mixed number into an improper fraction.

In fact, a student mentioned that she has not understood very well the previous example about the inversion of 2.72. For specifying the student's question, the teachers asked "*Do you mean how we have turned the mixed number into an improper fraction?*". As in the previous episode, while asking she used a metaphoric gesture of a circle around the mixed number and a deictic gesture for pointing at the improper fraction. She then repeated the question for the whole class by using a deictic gesture while mentioning the mixed number and the improper fraction respectively. Thus, in this case also the teacher produced a semiotic bundle, by matching speech and gestures.

Next, the student started explaining to the teacher the procedure she followed for turning 2.72 into an improper fraction. The teacher asked her to solve the following example (inversion of 3.136) for checking her understanding. In trying to help her focus on the number of decimal digits, she made treatments of a previous student's oral answer by paraphrasing it ("*Ann told us that…*"). In addition, the teacher synchronized speech and gestures, using a deictic gesture pointing at the digits of the decimal number (2.72) of the previous example for helping the student remember that "*when the digits are two the denominator of the fraction is 100*" and pointing also at each number of the fraction $72/100$. The teacher then repeated the deictic gesture for the decimal digits of number 3.136 for helping the student answer that "*when the digits are three the denominator of the fraction is 1000*". After, this students-teacher interaction the student proceeded to the verbal explanation of the solution of the task and the teacher to the conversion of the explanation into a symbolic form on the board. This semiotic game seemed effective in the following minutes of the episode, as the students provided right solutions for inversions including decimal numbers.

5. Discussion

The analysis of the teaching episodes presented above aimed at first in tracing the semiotic means which are used either by the teacher or the students during formative assessment and mainly while providing formative feedback, from the teacher to the students or between students with the guidance of the teacher. For this purpose Arzarello's and his colleagues' (2009) synchronic analysis was used, which allowed us to identify a diversity of semiotic means involved in the formative assessment process. Although all the teaching episodes we discuss were carried out during the teaching of Algebra content, mainly related to symbolic representations, our results showed that other semiotic means can have an essential role during this process. In fact, through the analysis of the four teaching episodes, the teacher was observed to mainly use oral language, written symbolic expressions and gestures. Thus, the teacher was producing semiotic bundles comprising of a multimodality of semiotic means. As stressed by Arzarello and Edwards (2005), multimodality consists in interactions among the different registers within a unique integrated system, composed by different modalities: gestures, oral and written language, symbols, and so on.

As for the students, besides oral language, they had the chance to use another semiotic means for providing instant feedback to their teacher about their level of understanding about the content of the lesson. The use of traffic lights cards as a semiotic means gave the students the flexibility to express their questions at any time they felt they haven't understand the mathematical content very well. The particular technique helped also the teacher identify the students' difficulties instantly and provide immediate feedback to them according to their needs. Therefore, the use of traffic lights cards as a semiotic means can facilitate the interaction between all participants (teacher and students) during the formative assessment process. With this semiotic means the teacher receives feedback about the effectiveness of teaching and the students' understanding and this helps the teacher decide how to modify the next steps in order to help students face their difficulties. Thus, this semiotic means creates interplay between the students and the teacher, which facilitates the semiotic game between them.

Besides identifying the type of semiotic means that were involved in our teaching episodes, we are also focused on examining how these different semiotic means were related in order to contribute to the production of semiotic bundles and to the semiotic game between the teacher and the students. Our results revealed that the semiotic means identified in the process of gaining or providing feedback were related between them, as conversions from one semiotic means to another were observed. In fact, conversions from verbal expressions to symbolic representations were often conducted by the teacher, during trying to provide feedback to the students in relation to the difficulties they have expressed. In addition the teacher was frequently producing gestures that were synchronized to her verbal expression; thus it can be consider as another type of conversion, from verbal expressions directly to gestures. In fact, the synchronization of speech and gesture is considered by Sfard (2009) to increase the effectiveness of teaching actions. Besides conversions, the teacher was observed to make treatments of the semiotic means used by the students. This mainly regards treatments of the students' oral productions, as many times the teacher was using the students' answers for repeating them in order to stress something or for expressing the meaning in a more complete form, using a more proper mathematical language.

It is, thus, evident that the transformation of semiotic means, either by treatments or conversions, is an important process for constructing mathematical knowledge and communication during the semiotic game between the teacher and the students. In agreement to this, Duval (2008) stresses that mathematics activities require the possibility of using various semiotic means and intrinsically consist in the transformation of semiotic means (Duval, 2006). It is, therefore, necessary teachers to get aware of the necessity of such kind of processes and actions during their teaching, besides the importance of incorporating multiple semiotic means.

In extending the analysis of our teaching episodes, the diachronic analysis of Arzarello and his colleagues (2009) was also considered necessary for helping us form a more complete idea about the teachers' semiotic actions during providing feedback to the students. Indeed, the diachronic analysis allowed us to identify changes in the teachers' semiotic productions. In all the episodes the teacher was mainly producing oral questions and making treatments of the students' verbal expressions and conversions from verbal to symbolic expressions and from verbal expressions to gestures. What differentiates in the teacher' semiotic productions are the kind of gestures, which get richer from the first lesson to the second. In particular, in the two episodes of lesson 1 the teacher produces only deictic gestures, synchronized to her verbal expressions. In the next two episodes from lesson 2 the teacher is observed to produce a diversity of gestures, as besides deictic gestures in the first episode, metaphoric and temporal highlighting gestures are also present. Thus, we observe a change in the teachers' kind of gestures with the same lesson (lesson 2) and from lesson 1 to lesson 2. In fact, Alibali et al. (2000) consider that gestures affect the mental representations of the speakers focusing their attention on specific features of the particular case.

Looking deeper at the 1st episode of lesson 2, it is interesting to focus on the changes traced in the teachers' semiotic productions between the two phases within this episode, in relation to the type of feedback. Actually, in the first phase of the episode the teacher involved the students in a peer-feedback process. Instead of providing feedback herself, the teacher guided the students in this process mainly by making treatments of the students' verbal expressions and by posing additional oral questions. She, then, provided direct feedback to the students by producing a semiotic bundle of deictic gestures and speech. Later on, at the second phase of the same episode, a teacher-student direct interaction took place, in which the teacher's semiotic bundle consisted of gestures with a blended character, as additional kinds of gestures were apparent.

Thus, at a first level, the teachers' semiotic means were differentiated in relation to the type of feedback, either indirect through guiding peer-feedback or by direct feedback to the students. At a second level, the differentiation regarded the semiotic means involved in the process of providing direct feedback to students, as at the beginning the teacher used a more simple type of semiotic bundle (speech and deictic gesture), whereas further on the semiotic bundle gained a more complex form (speech and different types of gestures). Consequently, we can say that the type of semiotic productions can be affected by the type of feedback (direct or indirect), but also within the same type of feedback different types of semiotic means are possible to be present. Therefore, the teachers should reflect about which are the proper semiotic means according to the type of formative assessment situations they are creating and according to the necessary modifications of their teaching actions based on the students' needs.

Concluding, our analysis highlighted the importance of using multiple semiotic means and transformation actions, such as treatments and conversions, in facilitating the interaction between the teacher and the students when applying formative assessment. Consequently, the use formative assessment actions in relation to the use and transformation of multiple semiotic means can contribute to the development of the students' cognitive, but also social structures, as learning should promote interaction and positive interdependence among students (Johnson & Johnson, 1996).

References

Alibali, M. W., Kita, S., & Young, A. (2000). Gesture and the process of speech production: We think, therefore we gesture. *Language and Cognitive Processes*, *15*(6), 593–613.

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 267–299.

Arzarello, F., & Edwards, L. (2005). *Gesture and the construction of mathematical meaning* (research forum 2). In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 1 (pp. 122–145). Melbourne, Australia: University of Melbourne.

Arzarello, F., & Paola, D. (2007). Semiotic games: The role of the teacher. In J. Woo, H. Lew, K. Park, & D. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, vol. 2 (pp. 17–24). Seoul, Korea: The Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

Arzarello, F., & Robutti, O. (2008). Framing the embodied mind approach within a multimodal paradigm. In L. English, M. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*, 2nd edition (pp. 720–749.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Arzarello, F., Ferrara, F., Paola, D., & Robutti, O. (2005). The genesis of signs by gestures: The case of Gustavo. *Proceedings of the 29 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 2* (pp. 73–80). Melbourne: PME.

Arzarello, F., Paola, D., Robutti, O., & Sabena, C. (2009). Gestures as semiotic resources in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 97–109.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Inside the black box: Raising standards through classroom assessment. *Phi Delta Kappan, 80*(2), 139–148.

Broadfoot, P., Weeden, P., & Winter, J. (2002). *Assessment: What's in it for Schools?*. Routledge.

Cauley, K. M., & McMillan, J. H. (2010). Formative assessment techniques to support student motivation and achievement. *The Clearing House: A Journal of Educational Strategies, Issues and Ideas, 83*(1), 1–6.

Chappuis, S., & Stiggins, R. J. (2002). Classroom assessment for learning. *Educational Leadership, 60*(1), 40–43.

Clark, I. (2010). The development of "Project 1": Formative assessment strategies in UK schools, *Current Issues in Education, 13*(3), 1–34.

Clark, I. (2011a). Formative assessment: Policy, perspectives and practice. *Florida Journal of Educational Administration and Policy, 4*(2), 158–180.

Clark, I. (2011b). Formative assessment and motivation: Theories and themes. *Prime Research on Education (PRE), 1*(2), 27–36.

Crooks, T. J. (1988). The impact of classroom evaluation practices on students. *Review of educational research, 58*(4), 438–481.

Duval, R. (2006). The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1-2), 103–131.

Duval, R. (2008). Eight problems for a semiotic approach in mathematics education. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger, F. (Eds.), *Semiotics in mathematics education: Epistemology, historicity, classroom, and culture* (pp. 39–62). Rotterdam, NL: Sense Publishers.

Elia, I., & Gagatsis, A. (2016). The role of gestures in the learning of mathematics. Presentation held in the summer course "*Neuroscience and Mathematics Education*", University of the Aegean, 30 June-04 July 2016, Rhodes, Greece.

Eurydice, Educational, Audiovisual, & Culture Executive Agency. (2012). *The European higher education area in 2012: Bologna process implantation report*. Ministerio de Educación.

General teaching council for England (2011). *Teaching quality papers.* Birmingham: Victoria Square.

Göksun, T., Hirsh-Paseka, K., & Golinkoff, R. M. (2010). How do preschoolers express cause in gesture and speech? *Cognitive Development, 25*, 56–68.

Goldin-Meadow, S. (2003). *Hearing gestures: How our hands help us think.* Chicago: University Press.

Harlen, W. (2000). *Teaching, learning and assessing science 5-12* (3rd ed.). London: Paul Chapman Publishing.

Hattie, K. (2009). *Visible learning: A synthesis of over 800 meta-analyses relating to achievement.* New York: Routledge.

Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1996). The role of cooperative learning in assessing and communicating student learning. In T. R. Gusky (Ed.), *1996 ASCD yearbook: Communicating student learning.* Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.

Lovece, S., Vannini, I., Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2016). Methodologies and tools for the video analysis of formative assessment practices in classroom (with students aged from 11 to 16). *EAPRIL Conference Proceedings 2015,* Issue 2 (pp. 203–213). ISSN 2406-4653.

McNeill, D. (1992). *Hand and mind: What gestures reveal about thought.* Chicago: University of Chicago Press.

Michael-Chrysanthou, P., Gagatsis, A., & Vannini, I. (2014). Formative assessment in mathematics: A theoretical model. *Acta Didactica Universitatis Comenianae – Mathematics, 14,* 43–70.

Michael-Chrysanthou, P., & Gagatsis, A. (2015). Students' beliefs for formative assessment in mathematics teaching and learning. *EAPRIL Conference Proceedings 2014*, Issue 1 (pp. 178–193). ISSN 2406-4653.

Michael-Chrysanthou, P., Lovece, S., Vannini, I., & Gagatsis, A. (2016). Exploring teachers' beliefs on formative assessment in mathematics teaching and learning in Cyprus and Italy. *EAPRIL Conference Proceedings 2015*, Issue 2 (pp. 511–523). ISSN 2406-4653.

National Council of Teachers of English (2010). *Fostering High-Quality Formative Assessment.* VA: NCTE. Retrieved from http://www.ncte.org/library/NCTEFiles/Resources/Journals/CC/0201sep2010/CC0201PolicyBrief.pdf

Nicol, D., & Macfarlane-Dick, D. (2004). Rethinking formative assessment in HE: A theoretical model and seven principles of good feedback practice. In C. Juwah, D. Macfarlane-Dick, B. Matthew, D. Nicol, D. & Smith, B. (Eds.), *Enhancing student learning though effective formative feedback.* York: The Higher Education Academy.

Nöth, W. (2000). *Handbuch der semiotic.* Metzler, Stuttgart und Weimar.

OECD (2005). *Annual report 2005: OECD indicators*. OECD Publishing. Retrieved from https://www.oecd.org/about/34711139.pdf

OECD (2012). *Education at a glance 2012: OECD indicators*. OECD Publishing. Retrieved from http://dx.doi.org/10.1787/eag-2012-en

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected papers of C. S. Peirce* (C. Hartshorne, P. Weiss, & A. Burks, Eds.). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Popham, W. J. (2008). *Transformative assessment.* VA: ASCD.

Radford, L., Bardini, C., & Sabena, C. (2007). Perceiving the general: The multisemiotic dimension of students' algebraic activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(5), 507–530.

Sadler, D. R. (1998). Formative assessment: Revisiting the territory. *Assessment in education, 5*(1), 77–84.

Saussure, F. de (1959). *General course in linguistics* (W. Baskin, Trans.). New York: Philosophical Library.

Sfard, A. (2009). What's all the fuss about gestures? A commentary. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(2), 191–200.

Van De Walle, A. J., Karp, S. K., & Bay-Williams, M. J. (2013). *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally* (8 ed.). United States of America: Pearson.

Wiliam, D., Lee, C., Harrison, C., & Black, P. (2004). Teachers developing assessment for learning: Impact on student achievement. *Assessment in Education, 11*(1), 49–65.

Riflessioni sui fondamenti teorici della ricerca in didattica della matematica nella sua complessità e problematicità

Maura Iori
NRD dell'Università di Bologna

Abstract. *There are many theories that nourish the research in mathematics education, and that research in turn nourishes, develops and produces in order to address the issues that mathematics teaching-learning raises at all school levels. Each of them provides specific analysis methods and tools to deal with certain aspects of mathematics education that others cannot provide. Hence the complexity of the research. On the other hand, multiple theories inevitably lead researchers to address the problem of their connection in relation to research problems that require a more specific articulated analysis, with different methodologies and tools. Hence the problematic nature of the research. This paper provides an overview of these issues and how the diversity of theoretical approaches is addressed and regarded as a resource for the research in mathematics education, and thus for teaching-learning mathematics.*

Keywords: mathematics education research; theories; principles; methodologies; research questions; development of theories; networking strategies

Sunto. *Numerose sono le teorie che alimentano la ricerca in didattica della matematica, e che la ricerca a sua volta alimenta, sviluppa e genera per far fronte ai problemi che l'insegnamento-apprendimento della matematica solleva a tutti i livelli scolastici. Ciascuna di esse fornisce metodi e strumenti di analisi specifici per trattare determinati aspetti della didattica della matematica che altre non possono fornire. Da qui la complessità della ricerca. D'altra parte, la molteplicità di teorie porta inevitabilmente il ricercatore a porsi il problema della loro connessione, in relazione a un problema di ricerca che richiede un'analisi più specifica e articolata, con diverse metodologie e strumenti. Da qui la problematicità della ricerca. Questo contributo fornisce una panoramica su tali aspetti e su come la diversità tra gli approcci teorici venga gestita e considerata come una risorsa per la ricerca in didattica della matematica, e dunque per l'insegnamento-apprendimento della matematica.*

Parole chiave: ricerca in didattica della matematica; teorie; principi; metodologie; domande di ricerca; sviluppo di teorie; strategie di connessione

1. Introduzione

L'insegnamento-apprendimento della matematica si manifesta in molteplici aspetti che non possono essere studiati, descritti, compresi o spiegati mediante un'unica teoria. Numerosi sono dunque gli approcci alla ricerca in didattica della matematica. Essi si fondano su teorie differenti che si contraddistinguono per le diverse interpretazioni dei ruoli attribuiti agli aspetti cognitivi, epistemologici, socioculturali, semiotici che emergono dalle attività di insegnamento-apprendimento. Una loro connessione all'interno di uno studio di ricerca può dunque aumentarne il potere descrittivo, esplicativo, nonché di controllo e di previsione.

Le teorie in didattica della matematica costituiscono un corpo di conoscenze sull'insegnamento-apprendimento in continua evoluzione; esse si sviluppano o modificano a causa degli stessi risultati di ricerca e dei contributi di discipline differenti: pedagogia, psicologia, sociologia, epistemologia, filosofia, didattica generale, linguistica, semiotica, neuroscienze, per citarne alcune. Da qui la complessità della ricerca in didattica della matematica. D'altra parte, quando un fenomeno viene letto e interpretato alla luce di teorie differenti, e le varie interpretazioni vengono tra loro confrontate, la ricerca manifesta anche tutta la sua problematicità, in quanto i principi su cui si fondano le diverse teorie non sono sempre tra loro compatibili.

Chi si occupa di ricerca in didattica della matematica o vuole semplicemente aggiornarsi sui suoi risultati non può dunque fare a meno di strumenti per riconoscere e gestire le somiglianze e le differenze tra le teorie, per rendere più profonde le osservazioni, le interpretazioni e le analisi di quel che succede in aula, nelle ore di matematica, e dunque gestire le situazioni d'aula in modo più efficace con le diverse metodologie di insegnamento che la ricerca scientifica mette a disposizione o che la comunità scientifica riconosce come valide.

2. Che cosa intendiamo per "teoria" (scientifica)

Non abbiamo qui la pretesa di fare un discorso epistemologico generale, riguardo alle teorie scientifiche; non è infatti questo il nostro scopo. Vogliamo invece spingerci di più verso la didattica della matematica, trattando l'argomento alla luce di alcuni Autori di questo mondo che hanno cercato di fare chiarezza sulla questione.

In *Le Parole della Pedagogia: Teorie Italiane e Tedesche a Confronto*, alla voce "scienza" si trova: "Il termine 'teoria scientifica' o 'scienza' è generalmente riservato a ogni rappresentazione (simbolica, astratta, scritta) condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni tra loro correlati da relazioni causali, descrivibili, significative (causa-effetto, deduzione, induzione ecc.)" (D'Amore, 2007, p. 335).

Si utilizza inoltre il termine "paradigma" (Kuhn, 1962) per indicare l'insieme delle teorie, delle leggi e degli strumenti che definiscono una tradizione di ricerca. In altre parole, il termine "paradigma" si utilizza per indicare una visione globale del mondo su cui indaga la comunità di scienziati di una determinata disciplina e che indirizza, in un dato periodo storico, la ricerca riguardo alla scelta dei fenomeni o problemi rilevanti da studiare, alla formulazione delle ipotesi e ai metodi di ricerca.

Per Thomas Kuhn (1922 – 1996) un importante aspetto dei paradigmi è la loro *incommensurabilità*: due paradigmi non possono cioè essere confrontati, in quanto le assunzioni o i concetti che sono parti integranti dei rispettivi paradigmi e coerenti all'interno di essi risultano complessivamente incompatibili. La *scienza normale* corrisponde a quei periodi in cui esiste all'interno di una disciplina un paradigma condiviso dagli scienziati. Il passaggio da un paradigma a un altro avviene soltanto dopo una crisi di un paradigma, e costituisce per Kuhn una vera e propria *rivoluzione* (*scientifica*).

Imre Lakatos (1922 – 1974) introduce invece l'idea di "programma di ricerca" (Lakatos, 1970), cioè di:

> una successione di teorie scientifiche collegate tra loro in uno sviluppo continuo, contenenti regole metodologiche di ricerca (sia in positivo, da seguire, sia in negativo, da evitare). Ogni programma deve contenere: un nucleo o centro del programma; un sistema di ipotesi ausiliarie; una euristica, cioè i procedimenti che si applicano alla risoluzione dei problemi. In questa successione, una nuova teoria si può allora considerare un progresso rispetto a una precedente se: fa predizioni che la precedente non era in grado di fare; alcune di tali predizioni si possono provare come vere; la nuova teoria spiega fatti che la precedente non poteva provare. (D'Amore, 2007, p. 335)

In particolare, nelle scienze umane una teoria si dice "scientifica" se dispone di un oggetto specifico di studio, un suo proprio metodo di ricerca e un suo specifico linguaggio condiviso.

> In questa direzione Thomas A. Romberg, alla fine degli anni ottanta, per definire le caratteristiche peculiari di una teoria scientifica consolidata e stabile affermava che:
>
> - deve esistere un insieme di ricercatori che dimostrino interessi in comune; in altre parole ci devono essere problematiche centrali e condivise che guidano il lavoro dei ricercatori;
> - le spiegazioni date dai ricercatori devono essere di tipo causale;
> - il gruppo dei ricercatori deve aver elaborato un vocabolario e una sintassi comune, sulla quale il gruppo è d'accordo;
> - il gruppo deve aver elaborato procedimenti propri per accettare o refutare gli enunciati in un modo considerato da tutti oggettivo e largamente condivisibile. (D'Amore, 2007, pp. 336–337)

Le teorie in didattica della matematica hanno tutte queste caratteristiche.

Per quanto sopra riportato, una *teoria in didattica della matematica* può essere concepita come una rappresentazione condivisa, coerente e plausibile, di un insieme di fenomeni (di insegnamento-apprendimento della matematica) tra loro correlati da relazioni causali, basata su assunzioni o principi condivisi da una gruppo di ricercatori, in un dato periodo storico e in un dato contesto culturale e sociale, che hanno interessi comuni e per i quali esistono problematiche considerate centrali e condivise.

Le teorie possono essere distinte a seconda dei principi che le caratterizzano, dei problemi sui quali si focalizzano, degli scopi che perseguono, dei loro modi di concepire la ricerca e i metodi di ricerca. In ogni caso, ogni teoria attinge a differenti discipline costituendo un corpo di conoscenze in continuo accrescimento, insieme alla ricerca stessa. Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) considerano le teorie come:

> sistemi di concetti e relazioni, basati su assunzioni e norme. Esse sono costituite da un nucleo, da componenti empiriche, e dalla loro area di applicazione. Il nucleo include i fondamenti di base, le assunzioni e le norme, che vengono dati per acquisiti. Le componenti empiriche comprendono concetti addizionali e relazioni con esempi paradigmatici; esse determinano il contenuto empirico e l'utilità attraverso l'applicabilità. (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 169) [1]

La loro nozione di teoria è di tipo dinamico ed è modellata, da una parte, da idee centrali, concetti e norme e, dall'altra parte, dalle pratiche dei ricercatori e degli insegnanti.

Teorie e osservazioni sono in ogni caso strettamente intrecciate le une alle altre, in modo dialettico: le teorie guidano le osservazioni e, allo stesso tempo, sono influenzate dalle osservazioni (Hanson, 1958). In altri termini, una teoria delimita i propri scopi, le proprie domande, i propri oggetti e metodi di ricerca e, allo stesso tempo, gli scopi, le domande, gli oggetti e i metodi di ogni ricerca sono carichi di teoria o di teorie.

In didattica della matematica, a seconda degli aspetti dei fenomeni di insegnamento-apprendimento sui quali si focalizza maggiormente l'attenzione – l'apprendimento, il discente, il contenuto da apprendere, l'insegnante, il contesto sociale etc. – tra le teorie alle quali si può attingere ci sono le seguenti:

- *teorie costruttiviste* nelle loro diverse varianti (Cobb, 1988; Ernest, 1991; Goldin, 1990; von Glasersfeld, 1995)
- *teoria delle situazioni didattiche* (Brousseau, 1986, 1997)
- *teoria antropologica della didattica* (Chevallard, 1992)
- *teorie socioculturali* nelle loro diverse varianti (D'Ambrosio, 1985; Radford, 1997)
- *teorie semiotiche* nelle loro diverse varianti (Arzarello, 2006; Bartolini Bussi & Mariotti, 2008; Duval, 1993, 1995; Godino, 2002; Godino & Batanero, 1994, 1998; Hoffmann, 2006; Sáenz-Ludlow & Presmeg, 2006)

per citarne solo alcune. In Radford (2008b) una teoria è concepita come:

[1] Tutte le citazioni in italiano di autori non italiani sono traduzioni nostre.

un modo di produrre interpretazioni e modi di azioni basati su:

- un sistema, *P*, di *principi fondamentali*, che includa visioni implicite e affermazioni esplicite che delineano i confini dell'universo del discorso e della prospettiva di ricerca adottata;
- una *metodologia*, *M*, che includa tecniche di raccolta dati e di interpretazione dei dati, sostenuti da *P*;[2]
- un insieme, *D*, di *domande di ricerca* paradigmatiche (modelli o schemi che generano domande specifiche quando si presentano nuove interpretazioni o quando si approfondiscono, ampliano o modificano i principi). (Radford, 2008b, p. 330)

I principi di una teoria costituiscono un *sistema*, non un insieme, in quanto non hanno tutti lo stesso peso, cioè c'è una gerarchia che li organizza o dà loro una certa priorità.

Inoltre, per Radford (2008b) la *metodologia* è da intendere in senso ampio. Non è soltanto una prospettiva teorica generale sulla ricerca, un teoria *sui* metodi (Ernest, 1998), ma include i *metodi di ricerca* stessi, ovvero le strategie o le procedure specifiche, gli strumenti o le tecniche di raccolta e di analisi dei dati. Come afferma Radford (2008b), la metodologia deve avere due caratteristiche:

- *coerenza*, cioè deve essere compatibile con i principi scelti o basarsi su di essi;
- *operatività*, cioè deve essere in grado di produrre e trattare i dati in modo da fornire risposte "soddisfacenti" alle domande di ricerca, ovvero risposte basate su metodi statistici, interviste, analisi di discorsi, episodi di classe etc.

Sempre in questa prospettiva, le *domande di ricerca* devono essere formulate chiaramente entro l'apparato concettuale della teoria. Una domanda di ricerca presuppone sempre una prospettiva teorica entro cui esprimerla.

Così, da una parte, la scelta dei principi *P* influenza *M* (in termini di operatività e di coerenza) e *D* (per quanto riguarda il modo in cui le domande di ricerca sono formulate) e, dall'altra parte, la scelta di *D* presuppone un sistema *P* di principi e indirizza la scelta di *M*.

Ci sono però problemi, argomenti, concetti o fenomeni che non presuppongono di per sé un determinato sistema *P* di principi; per esempio quando la ricerca che è stata fatta su di essi è insufficiente, oppure quando le teorie esistenti risultano inefficaci, o non applicabili. In tali casi il ricercatore può (1) utilizzare le teorie soltanto come lenti orientative generali che modellano ciò che osserva e le domande di ricerca, oppure (2) generare una nuova teoria quale risultato finale di uno studio, come nel caso della *grounded*

---

[2] La raccolta dati non è qui necessariamente intesa nel senso empirico positivista delle scienze naturali; la raccolta dati può anche far riferimento a processi di produzione ermeneutici, fenomenologici, epistemologici e di altro tipo, dotando i dati di rilevanza e di senso.

theory (Glaser & Strauss 1967). In tal caso le domande di ricerca sono finalizzate alla generazione di una nuova teoria (su un processo, un'azione o un'interazione) fondata (*grounded*) sui punti di vista dei partecipanti coinvolti nello studio (Creswell, 2014).

Radford (2008a; 2011), a cui farò riferimento qui di seguito, prende in esame i principi di tre approcci di ricerca in didattica della matematica: il costruttivismo, la teoria delle situazioni didattiche e le teorie socioculturali. Lo scopo è quello di evidenziare a livello teorico le somiglianze e le differenze tra tali approcci, e chiarire alcuni temi attorno ai quali ruota anche l'attuale ricerca in didattica della matematica.

Principi del costruttivismo

P1. La conoscenza non è ricevuta passivamente, ma costruita dal soggetto conoscente (Cobb, 1988).

P2. La funzione della cognizione è adattiva e permette l'organizzazione del mondo dell'esperienza, non la scoperta di una realtà ontologica (von Glasersfeld, 1995).

P3. Il soggetto conoscente non solo costruisce la propria conoscenza, ma lo fa in modo autonomo (Cobb, 1988).

Si tratta di una teoria centrata principalmente sullo studente, sul processo di apprendimento dello studente.

Principi della teoria delle situazioni didattiche (Brousseau, 1986, 1997)

P1. La conoscenza risulta dalla soluzione "ottimale" di una data situazione o un dato problema.

P2. L'apprendimento è – in accordo con l'epistemologia genetica di Piaget – una forma di adattamento cognitivo.

P3. Per ogni conoscenza matematica c'è una famiglia di situazioni suscettibile di darle un senso adeguato.

P4. L'autonomia dello studente è una condizione necessaria per un apprendimento significativo della matematica.[3]

La teoria delle situazioni didattiche attribuisce all'interazione sociale un ruolo rilevante, anche se "l'acquisizione di conoscenze è, in ultima analisi, il risultato della relazione personale dello studente con l'oggetto di conoscenza" (Radford, 2008a, p. 10).

---

[3] Come evidenzia Brousseau (1986): più l'insegnante esplicita chiaramente ciò che vuole, più dice all'allievo esattamente ciò che deve fare, e più impedisce all'allievo di arrivare a un'effettiva comprensione e quindi a un apprendimento significativo. Si tratta del paradosso della *devoluzione* (Brousseau, 1986). Per *devoluzione* si intende qui il processo di responsabilizzazione con il quale l'insegnante ottiene che l'allievo si impegni personalmente nella risoluzione di un problema o, più in generale, nella costruzione del propria conoscenza.

Principi delle teorie socioculturali

P1. La conoscenza è generata dagli individui nel corso di pratiche sociali costituite storicamente e culturalmente.

P2. La produzione di conoscenza non corrisponde a esigenze di adattamento, ma è incorporata in forme culturali di pensiero intrecciate a una realtà simbolica e materiale che fornisce le basi per interpretare, comprendere e trasformare il mondo degli individui e i concetti e le idee che essi si formano su di essa.

P3. L'apprendimento è il raggiungimento di una conoscenza culturalmente-oggettiva che gli studenti ottengono attraverso un processo sociale di *oggettivazione* mediato da segni, linguaggi, artefatti e interazione sociale, quando gli studenti sono coinvolti in forme culturali di riflessione e azione.

I *mezzi semiotici di oggettivazione* sono segni e artefatti che incorporano e allo stesso tempo permettono di comunicare, condividere, sviluppare, far evolvere sistemi di idee, significati culturali, forme di azione e di pensiero; essi permettono dunque la presa di coscienza soggettiva (*oggettivazione*) degli oggetti culturali (Radford, 2003).

Le teorie socioculturali costituiscono per Radford (2011) un paradigma nuovo: la conoscenza non è il risultato di strutture epistemiche che trascendono la cultura, o di un puro adattamento a-storico, ma una forma culturale di riflessione e azione incorporata nelle pratiche sociali, mediata dal linguaggio, dall'interazione sociale, da segni e artefatti (Arzarello, 2006).

Di tutt'altro tipo è invece la teoria dei registri di rappresentazione semiotica (Duval, 1993, 1995, 2006a, 2006b), sulla quale si fonda l'approccio semio-cognitivo. In essa si possono evidenziare i seguenti principi.[4]

Principi della teoria dei registri di rappresentazione semiotica

P1. Si ha accesso agli oggetti matematici (non in sé ma come unità culturali o temi di apprendimento) solo *attraverso* (non *prima* né *dopo*) la produzione di rappresentazioni semiotiche.

P2. Un oggetto matematico è un *invariante* (operatorio o logico-discorsivo) di rappresentazioni semiotiche nei cambiamenti di registro.

P3. Ciascuna rappresentazione semiotica del medesimo oggetto matematico non esplicita le medesime proprietà dell'oggetto rappresentato, ma solo il proprio contenuto.

[4] In quel che segue faccio riferimento anche ad alcuni aspetti che il prof. Raymond Duval ha evidenziato in alcune sue risposte a mie domande nel corso di una conversazione durata vari giorni durante un mio soggiorno a Lille nel giugno del 2013. Lo ringrazio ancora una volta per avermi dato il permesso di renderle pubbliche, con considerazioni personali.

P4. La comprensione è nella coordinazione di registri differenti nelle attività matematiche, ovvero nella capacità di *riconoscere* un oggetto matematico nelle sue possibili rappresentazioni semiotiche; capacità che si manifesta nelle attività di *conversione* da un registro all'altro e in quelle di *trattamento* delle rappresentazioni nei rispettivi registri.

P5. La difficoltà nel riconoscimento di un medesimo oggetto matematico in due rappresentazioni, ottenute l'una dall'altra mediante una conversione o un trattamento, si presenta quando il contenuto della rappresentazione di partenza ha poco o nulla (semanticamente o sintatticamente) in comune con il contenuto della rappresentazione di arrivo.

Si tratta di una teoria nella quale i processi di comprensione sottostanti le attività matematiche sono interpretati da un punto di vista (quello semio-cognitivo) che è completamente differente non solo dai punti di vista su cui si fondano le teorie precedenti, ma anche dal punto di vista matematico (Duval, 2012, 2015).

I principi sopra elencati permettono di evidenziare il diverso ruolo che le teorie possono svolgere nella ricerca in didattica della matematica, e dunque nell'analisi delle produzioni matematiche di studenti e insegnanti. Esse forniscono una lente che modella ciò che si osserva, le domande di ricerca, la conduzione della ricerca, l'analisi dei dati e la loro interpretazione. In alcuni tipi di studio possono modellare o rimodellare la teoria scelta inizialmente per condurre lo studio, oppure costituire il suo risultato finale, come abbiamo già detto. Il loro uso è dunque molto vario e articolato per poter interpretare i diversi aspetti dei fenomeni didattici presi in esame, e in particolare la complessità dei processi di comprensione sottostanti le attività matematiche.

3. Strategie per connettere teorie in didattica della matematica

Le teorie possono essere distinte a seconda della struttura dei loro principi o concetti di base, del tipo di oggetti o fenomeni su cui si focalizzano, delle domande di ricerca che si pongono, del tipo di risposte che considerano adeguate, del modo di vedere la ricerca, i suoi scopi e i suoi metodi, etc. La loro diversità costituisce in ogni caso una importante risorsa per comprendere e gestire la ricchezza e complessità della produzione scientifica.

Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) chiamano strategie di *networking* quelle *strategie* (linee guida generali) per mettere in relazione, per quanto possibile, teorie differenti e dunque gestire realtà complesse:

> Le strategie di *networking* sono quelle strategie di connessione che da una parte rispettano il pluralismo e/o la modularità degli approcci teorici autonomi, ma che dall'altra parte sono interessate a ridurre la molteplicità degli approcci teorici tra loro sconnessi nelle discipline scientifiche. (…) Le strategie di *networking* sono strutturate in coppie di strategie simili, per le quali si possono fare distinzioni di grado: comprendere e rendere comprensibile, comparare e contrastare, combinare

> e coordinare, integrare localmente e sintetizzare. (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, pp. 170–171)

Queste coppie sono collocate tra due poli ideali, o strategie estreme:

- “ignorare le altre teorie”, considerando ciascuna teoria come relativa e isolata;
- “unificare globalmente”, per avere un’unica teoria.

Prediger, Bikner-Ahsbahs e Arzarello (2008) evidenziano che la maggior parte dei ricercatori che connettono teorie applica contemporaneamente più di una strategia, adottando strategie intermedie tra le due estreme (Figura 1).

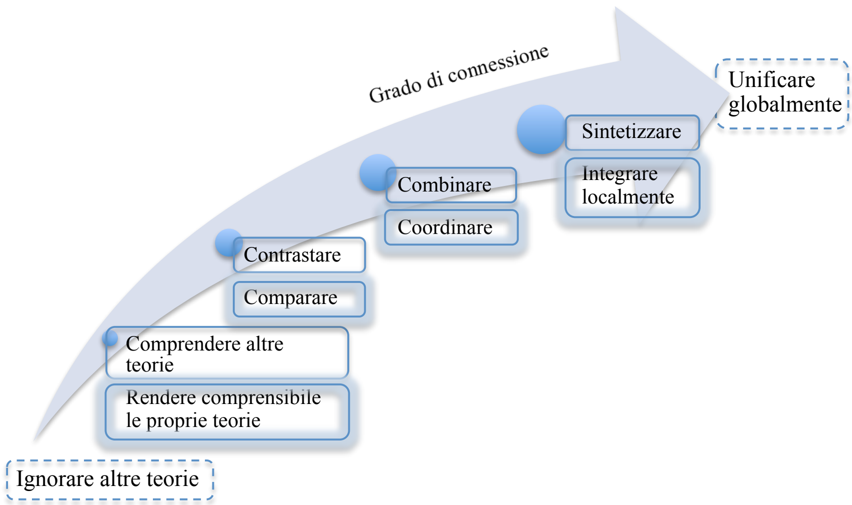


Figura 1. Strategie per connettere teorie.
Adattata da Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 170.

In particolare:

- “Comprendere” le altre teorie, e le loro articolazioni nelle pratiche di ricerca è una condizione indispensabile per connetterle.
- “Comparare” e “contrastare” le teorie sono le strategie più utilizzate. Tutte le teorie possono essere comparate o contrastate. Il “comparare” ha come scopo quello di individuare in modo generale le loro somiglianze e differenze, mentre il “contrastare” ha come scopo quello di sottolineare le loro differenze tipiche.
- “Coordinare” e “combinare” le teorie sono strategie che hanno come scopo quello di utilizzare strumenti analitici differenti per lo studio di un dato problema pratico o per l’analisi di un fenomeno empirico. Il coordinamento può essere effettuato soltanto tra teorie le cui assunzioni o principi sono tra

loro compatibili e le cui componenti empiriche o *praxeologie* (sistemi di pratiche di ricerca) sono complementari (per esempio, la teoria antropologica della didattica e lo spazio-APC).[5] Quando gli approcci teorici sono soltanto giustapposti si parla di "combinazione", anziché di coordinamento. La combinazione di approcci teorici non necessita della complementarietà o della completa coerenza degli approcci teorici. Possono essere combinate anche teorie con assunzioni di base contraddittorie, al fine di ottenere una visione multiforme del fenomeno preso in esame (per esempio la teoria delle situazioni didattiche e le teorie socioculturali).

- "Sintetizzare" e "integrare (localmente)" le teorie sono strategie che hanno come scopo quello di sviluppare le teorie mettendo insieme, in un nuovo quadro, alcuni approcci teorici. La strategia "sintetizzare" è utilizzata per connettere due o più teorie aventi la stessa rilevanza in modo da far evolvere una nuova teoria. Se il livello di sviluppo delle teorie considerate non è lo stesso, e se ci sono soltanto alcuni concetti o aspetti di una teoria inseriti in una teoria più elaborata e dominante, si parla di "integrazione locale".[6]

Il *networking* di teorie può essere realizzato in vari modi usando differenti strategie che si focalizzino su aspetti diversi delle teorie e per scopi differenti: comprendere le altre teorie (e la propria), comprendere meglio un dato fenomeno empirico, sviluppare una data teoria, e, più in generale, migliorare la pratica di insegnamento. Si tratta di: "un nuovo modo di guardare le teorie, che può modellare nuovi tipi di pratiche di ricerca" (Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello, 2008, p. 176).

Come afferma Radford (2008b), poiché in didattica della matematica è impossibile una teoria onnicomprensiva, è auspicabile un dialogo tra teorie che evidenzi le loro possibili connessioni. Per il *networking* è di estremo interesse considerare le teorie come terne flessibili $\tau = (P, M, D)$ di principi, metodologie e domande di ricerca paradigmatiche, in quanto la connessione

[5] Lo spazio-APC (*spazio di Azione, Produzione e Comunicazione*) è un approccio teorico che ha come strumento di analisi fondamentale, il *semiotic bundle* (Arzarello, 2006). Il *semiotic bundle* è definito da Arzarello (2006) come una struttura dinamica costituita da una collezione di insiemi semiotici (sistemi semiotici, gesti, modi di espressione, usi di artefatti) e da un insieme di relazioni tra questi insiemi semiotici (per esempio, i modi di conversione tra gli insiemi). Tale nozione estende la definizione classica di *sistema semiotico*: un insieme di segni, un insieme di regole di produzione e di trasformazione, e una struttura di significati sottostante. Lo spazio-APC e la TAD (Teoria Antropologica della Didattica) hanno oggetti teorici coerenti ma complementari, precisamente, le praxeologie nella TAD e il *semiotic bundle* nello spazio-APC. Le componenti empiriche di tali teorie sono differenti, in particolare, l'analisi didattica e l'analisi semiotica, rispettivamente, nella TAD e nello spazio-APC. Tali teorie possono essere dunque localmente coordinate.

[6] Per esempio, l'approccio semiotico-culturale (Radford, 1997) integrato con la teoria dell'*Embodied Cognition* (*cognizione incorporata nel corpo*, nel senso che la cognizione è modellata dall'interazione sensoriomotoria e del corpo con l'ambiente), che emerge dalla psicolinguistica e dalle neuroscienze, forma lo spazio-APC (Arzarello, 2006).

tra teorie può avvenire a *vari livelli*. Una connessione può essere fatta, per esempio, a livello di principi, a livello di metodologie, a livello di domande di ricerca, o di una loro combinazione.

La concettualizzazione delle teorie in termini di terne permette anche di evidenziare i limiti del *networking* di teorie. Sebbene una connessione sia sempre possibile, c'è tuttavia un limite a ciò che può essere connesso. Il limite è determinato dallo scopo della connessione, ma anche dalle peculiarità delle tre componenti (P, M, D) delle teorie che vengono connesse, ovvero da ciò che una teoria può legittimamente asserire sui suoi oggetti. Al di là di tale limite la teoria entra in conflitto con i suoi stessi principi.

Per esempio, l'interazione sociale nel sistema P di principi della teoria delle situazioni didattiche ha un ruolo e quindi un significato differente da quello che ha nel sistema P' delle teorie che si focalizzano sulle dimensioni affettive e motivazionali dell'apprendimento: "Nella teoria delle situazioni didattiche, l'interazione sociale non si interessa delle sue dimensioni affettive o volitive; il suo principale interesse è la progettazione di 'situazioni a-didattiche' e la loro 'devoluzione'" (Radford, 2008b, p. 323). Mentre nel primo caso l'interazione sociale gioca un ruolo principalmente *epistemico*, nel secondo caso gioca un ruolo soprattutto *psicologico*.

Sebbene il confronto tra teorie sia sempre possibile, la connessione di teorie presenta sempre dei limiti.

Prendendo in esame, per esempio, il costruttivismo e la teoria delle situazioni didattiche, si nota immediatamente un'apparente compatibilità. Infatti, entrambe le teorie concepiscono la conoscenza in modo adattivo, ed entrambe valorizzano l'autonomia del discente.

> Tuttavia, se si scava più a fondo, ci si rende conto che ciascuna di queste teorie ricorre a un *principio di autonomia* differente: mentre nel costruttivismo il principio di autonomia del soggetto conoscente è inquadrato in un'etica di costruzioni personali e di auto-determinazione, nella teoria delle situazioni didattiche l'autonomia del soggetto conoscente è concepita come una condizione epistemica per l'acquisizione di conoscenze. (Radford, 2008b, p. 325)

Nel primo caso l'individuo è concepito come dotato della capacità di produrre ciò che von Glasersfed (1995) chiama conoscenza "viabile" (adeguata) e tutto ciò che non proviene dall'interno dell'individuo è spesso visto come una costrizione o come un tentativo di violare il diritto dell'individuo all'auto-determinazione. Nel secondo caso, invece, la conoscenza matematica, quella culturalmente e storicamente costituita, è considerata come qualcosa di raggiungibile dall'individuo fin dall'inizio, e preesistente al processo di apprendimento; diventa dunque centrale la fase di istituzionalizzazione, nella quale l'insegnante evidenzia il carattere normativo della conoscenza.[7]

---

[7] Per *istituzionalizzazione* della conoscenza si intende quel processo attraverso il quale l'insegnante riconosce, accetta, legittima la costruzione di una conoscenza o la risoluzione di

In generale, la connessione tra teorie dipende dalla compatibilità dei principi delle teorie e dagli scopi della connessione. In termini di integrazione, le teorie possono essere connesse (anche solo localmente) se i loro principi teorici (o soltanto alcuni di essi) sono "sufficientemente vicini" gli uni agli altri (Radford, 2008b).

Così, nell'àmbito del *networking* di teorie, la strategia "integrare localmente" può dare origine a percorsi multi-teorici in grado di gestire in modo efficace e a più voci la complessità dei fenomeni di insegnamento-apprendimento.

4. Un *dialogo* a più voci

La teoria delle situazioni didattiche, le teorie socioculturali e le teorie semiotiche in didattica della matematica nelle loro diverse varianti (approccio semiotico-culturale, spazio-APC, approccio onto-semiotico, approccio semio-cognitivo, approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana, teoria della mediazione semiotica, etc.) forniscono strumenti di analisi di estremo interesse per l'attuale ricerca internazionale in didattica della matematica.

La teoria delle situazioni didattiche permette un'analisi profonda e dettagliata delle relazioni che si costituiscono tra l'insegnante, l'allievo e gli elementi materiali, culturali e sociali al contorno, con l'obiettivo di un apprendimento autonomo dell'allievo; il contratto didattico è l'elemento fondante e organizzatore di tali relazioni, suscettibile di cambiamenti, ma sempre fortemente legato al contenuto matematico in gioco.

Le teorie socioculturali considerano la conoscenza come strettamente collegata sia alle attività dei singoli soggetti sia alle istituzioni culturali del contesto sociale considerato; esse mettono in evidenza le forme di pensiero che le attività matematiche veicolano, la natura degli oggetti e degli apprendimenti che emergono da tali attività e, più in generale, i ruoli dei contesti istituzionali, sociali e culturali nei processi di insegnamento-apprendimento (Radford, 1997).

Gli approcci semiotici si focalizzano sulla natura dei segni (parole, segni matematici, gesti e artefatti) che emergono dalle attività matematiche, sulle loro funzioni, sulle loro molteplici possibilità interpretative, e sulle forme di apprendimento semiotico che le attività matematiche veicolano.

In generale, in un processo di insegnamento-apprendimento, il soggetto che apprende si trova coinvolto in un'istituzione che, da una parte, prevede la realizzazione di determinate pratiche matematiche dalle quali dovranno emergere oggetti istituzionali (condivisi da una data comunità scientifica) e, dall'altra parte, esige la realizzazione da parte del singolo studente di ulteriori

---

un problema, in una situazione di cui l'allievo non conosce l'intenzione didattica (situazione *a-didattica*).

pratiche matematiche dalle quali dovranno emergere oggetti personali compatibili con gli oggetti istituzionali o con le forme di pensiero matematico (teorie socioculturali).

Le pratiche istituzionali si realizzano attraverso la costruzione di adeguate situazioni di insegnamento-apprendimento, di natura dinamica, in grado di stimolare determinati tipi di apprendimenti, nell'àmbito di un contratto didattico (teoria delle situazioni didattiche).

In qualsiasi tipo di pratica matematica, tuttavia, l'accesso agli oggetti matematici è soltanto semiotico, attraverso rappresentazioni semiotiche, dunque l'attività cognitiva risulta inscindibile da quella semiotica.

Nell'approccio semio-cognitivo le difficoltà più profonde, quelle che la maggior parte dei soggetti incontra nelle attività matematiche, sono ricondotte alla varietà delle rappresentazioni semiotiche utilizzate in matematica e alla complessità della loro produzione, scelta, trattamento e conversione. Non sono ricondotte alla mancanza di comprensione dei concetti matematici coinvolti, a fattori psicologici, cognitivi (in senso classico), pedagogici o sociali, ma alla complessità della gestione semiotica; gestione semiotica dalla quale l'apprendimento concettuale dipende e risulta inscindibile.

D'altra parte, l'analisi semio-cognitiva che si fonda sulla teoria dei registri di rappresentazione semiotica può essere estesa all'analisi onto-semiotica delle configurazioni di oggetti e processi che intervengono in una data attività matematica. (Uno studio comparativo tra la teoria dei registri di rappresentazione è l'approccio onto-semiotico si trova in: Pino-Fan, Guzmán, Font, & Duval, 2015).

Ma l'accesso cognitivo agli oggetti matematici si ha soltanto *attraverso* rappresentazioni semiotiche che presentano componenti di tipo differente, legate, per esempio, ad aspetti iconico-qualitativi (aspetti concreti o di somiglianza della rappresentazione con qualcos'altro di concreto), iconico-strutturali (aspetti della rappresentazione legati alla sua costruzione, a proprietà o a teoremi), di analogia (aspetti della rappresentazione posti in rapporto, non necessariamente di somiglianza iconica, con il linguaggio quotidiano o l'esperienza sensibile), indicali (aspetti di rinvio a qualcos'altro, come a un'operazione da svolgere, a un'altra rappresentazione, a un altro oggetto matematico, o a proprietà), simbolici (aspetti convenzionali della rappresentazione, come quelli legati a notazioni, definizioni, regole o vincoli d'uso). Riguardo a tali aspetti, l'approccio semiotico-interpretativo di tradizione peirceana fornisce strumenti di analisi molto interessanti. (Per approfondire su tali aspetti, si veda: Iori, 2015).

La teoria delle situazioni didattiche, le teorie socioculturali e le teorie semiotiche possono essere dunque confrontate, coordinate, combinate, o integrate localmente per descrivere aspetti differenti del medesimo fenomeno didattico; il tutto alla luce della relazione dialettica tra teorie realiste e teorie pragmatiste evidenziata da D'Amore e Godino (2006). E questo perché il ricercatore pragmatista si focalizza anzitutto sulle domande di ricerca e utilizza differenti teorie e metodologie per ottenere spiegazioni più ampie e articolate del fenomeno didattico in esame, dunque migliori possibilità di risposta alle domande di ricerca. In altri termini, in accordo con il *paradigma di ricerca pragmatista* (Tashakkori & Teddlie, 2003), il ricercatore sceglie le teorie, i metodi, le tecniche e le procedure di ricerca che più soddisfano le esigenze e gli scopi della sua ricerca.

5. Conclusioni

I molteplici aspetti dei processi di insegnamento-apprendimento richiedono strumenti di analisi specifici, che forniscano chiavi di lettura differenti, per tener conto simultaneamente delle differenti dimensioni (affettiva, cognitiva, socioculturale, semiotica, o semio-cognitiva) dei fenomeni di insegnamento-apprendimento.

Le teorie in didattica della matematica, come tutte le teorie scientifiche, sono in continua evoluzione, si modificano e si sviluppano continuamente insieme alla ricerca stessa – da qui la *complessità* della ricerca – e possono essere confrontate, combinate, coordinate o localmente integrate – evidenziando tutta la *problematicità* della ricerca – allo scopo di ottenere un'analisi più ampia e articolata dei fenomeni di insegnamento-apprendimento della matematica. D'altra parte esse permettono di fornire all'insegnante metodologie, metodi, strumenti differenti per stimolare un insegnamento-apprendimento della matematica da più punti di vista, evitando il ricorso a metodi o strumenti pre-confezionati o alternativi di dubbia efficacia, in quanto non sottoposti al severo giudizio scientifico (D'Amore, 2016).

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. In L. Radford & B. D'Amore (Eds.), *Semiotics, Culture and Mathematical Thinking* [Special Issue]. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 267–299.

Bartolini Bussi, M. G., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., pp. 746–783). New York: Routledge.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 33–115.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12*(1), 73–112.

Cobb, P. (1988). The tension between theories of learning and instruction in mathematics education. *Educational Psychologist*, *23*(2), 87–103.

Creswell, J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches* (4th ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

D'Ambrosio, U. (1985). Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *5*(1), 44–48.

D'Amore, B. (2007). Voci per il dizionario. In F. Frabboni, G. Wallnöfer, N. Belardi, & W. Wiater (Eds.). *Le parole della pedagogia: Teorie italiane e tedesche a confronto* (Didattica disciplinare, pp. 72–75; Formazione in scienze naturali, pp. 140–142; Formazione in matematica, pp. 145–147; Scienza, pp. 335–337). Torino: Bollati Boringhieri.

D'Amore, B. (2016). A proposito di "metodi di insegnamento" univoci: Errori pedagogici, epistemologici, didattici e semiotici delle metodologie univoche. *La Vita Scolastica web*. Disponibile su http://www.giuntiscuola.it/lavitascolastica/magazine/articoli/a-proposito-di-metodi-di-insegnamento-univoci/

D'Amore, B., & Godino, D. J. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(1), 9–38.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Duval, R. (2006a). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, *20*(4), 585–619.

Duval, R. (2006b). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103–131.

Duval, R. (2012). Quelles théories et quelles méthodes pour les recherches sur l'enseignement des mathématiques? *Práxis Educativa*, *7*(2), 305–330.

Duval, R. (2015). Cuestionamientos sobre la "elección" y utilización de teorías en *mathematics education*. In B. D'Amore & M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática: Una mirada internacional, empírica y teórica* (pp. 159–182). Chia, Colombia: Universidad de La Sabana.

Ernest, P. (1991). Constructivism, the psychology of learning, and the nature of mathematics: Some critical issues. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of 15th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 25–32), Assisi.

Ernest, P. (1998). The epistemological basis of qualitative research in mathematics education: A postmodern perspective. In A. R. Teppo (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education* (*Journal for Research in Mathematics Education, Monograph No. 9*), (pp. 22–39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Glaser, B. G., & Strauss, A. L. (1967). *The discovery of grounded theory: Strategies for qualitative research*. New York: Aldine.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2-3), 237–284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177–195). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. (1990). Chapter 3: Epistemology, constructivism, and discovery learning in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education. Monograph, 4*, 31–47 and 195–210.

Hanson, N. R. (1958). *Patterns of discovery: An inquiry into the conceptual foundations of science.* Cambridge: Cambridge University Press.

Hoffmann, M. H. G. (2006). What is a "semiotic prospective", and what could it be? Some comments on the contributions to this special issue. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 279–291.

Iori, M. (2015). *La consapevolezza dell'insegnante della dimensione semio-cognitiva dell'apprendimento della matematica* (Tesi di dottorato, Università di Palermo, Italia). Disponibile su http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/Phd/Iori/Iori.htm

Kuhn, T. S. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Lakatos, I., & Musgrave, A. (Eds.) (1970). *Criticism and the growth of knowledge*. Cambridge: Cambridge University Press.

Pino-Fan, L., Guzmán, I., Font, V., & Duval, R. (2015). The theory of registers of semiotic representation and the onto-semiotic approach to mathematical cognition and instruction: Linking looks for the study of mathematical understanding. In K. Beswick, T. Muir, & J. Wells (Eds.), *Proceedings of the 39th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 33–40). Hobart, Australia: PME.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: First steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education, 40*(2), 165–178.

Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *17*(1), 26–33.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, *5*(1), 37–70.

Radford, L. (2008a). Theories in mathematics education: A brief inquiry into their conceptual differences. *Working paper, ICMI 11 Survey Team 7: The notion and role of theory in mathematics education research* (pp. 1–17).

Radford, L. (2008b). Connecting theories in mathematics education: Challenges and possibilities. *ZDM Mathematics Education*, *40*(2), 317–327.

Radford, L. (2011). La evolución de paradigmas y perspectivas en la investigación: El caso de la didáctica de las matemáticas [The evolution of paradigms and perspectives in research: The case of mathematics education]. In J. Vallès, D. Álvarez, & R. Rickenmann (Eds.), *L'activitat docent intervenció, innovació,* *investigació* [*Teacher's activity: Intervention, innovation, research*] (pp. 33–49), Girona (Spain).

Sáenz-Ludlow, A., & Presmeg, N. (2006). Guest editorial: Semiotic perspectives on learning mathematics and communicating mathematically. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 1–10.

Tashakkori, A., & Teddlie, C. (Eds.). (2003). *Handbook of mixed methods in social and behavioral research*. Thousand Oaks, CA: Sage.

von Glasersfeld, E. (1995). *Radical constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.

CONVEGNI E CONGRESSI

Programma del Convegno Internazionale *La matematica e la sua didattica* in occasione dei 70 anni di Bruno D'Amore - *Mathematics and Mathematics Education* in occasion of the 70 years of Bruno D'Amore, 8 ottobre 2016, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna.

La Matematica e la sua didattica
Mathematics and Mathematics Education

In occasione dei 70 anni di Bruno D'Amore
In occasion of the 70 years of Bruno D'Amore

Convegno Internazionale - 8 ottobre 2016 - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna
International Conference - 8 October 2016 - Department of Mathematics - University of Bologna

Questo evento è realizzato in collaborazione con il Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna ed è proposto e promosso dai seguenti enti accademici e di ricerca:

Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna

NRD (Nucleo di Ricerca Didattica) di Bologna

Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotà, Doctorado en Educación

Université de Bordeaux Laboratoire Cultures et Diffusion des Savoirs (CeDS EA 7440)

Dipartimento di Filosofia e Comunicazione dell'Università di Bologna

Dipartimento di Scienze dell'Educazione

Universidad Nacional de Colombia

Department of Education University of Cyprus

Istituto di Matematica, Statistica e Computazione Scientifica, Università Statale di Campina, San Paolo, Brasile

UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, SP, Brasil
IMECC - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Campinas, SP, Brasil

Scuola universitaria professionale della Svizzera Italiana

Società Matematica della Svizzera Italiana

Departamento de Innovación y Formación Didáctica of the University of Alicante

University of Helsinki

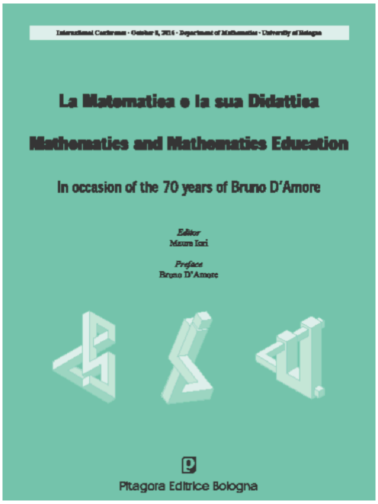
Università di Parma, Dipartimento di Matematica e Informatica

Dipartimento di Scienze della formazione, dei Beni culturali e del Turismo dell'Università degli Studi di Macerata

Partecipanti al convegno:
Maria Luisa Altieri Biagi, Luis Carlos Arboleda (Colombia), Gianfranco Arrigo (Svizzera), Miglena Asenova, Massimo Baldacci, Hector Mauricio Becerra Galindo (Colombia), Alberto Bertoni, Luis Ángel Bohórquez Arenas (Colombia), Giorgio Bolondi, Paolo Bonavoglia, Luigi Borzacchini, Umberto Bottazzini, Laura Branchetti, Guy Brousseau (Francia), Andrea Canevaro, Vittorio Capecchi, Anna Cerasoli, Claudio Cerritelli, Theodora Christodoulou (Cipro), Ciro Ciliberto, Tullia Colombo, Pierluigi Contucci, Ubiritan D'Ambrosio (Brasile), Mirko Degli Esposti, Jean Dhombres (Francia), Pietro Di Martino, Benedetto Di Paola, Giovanni Dore, Liliana Dozza, Raymond Duval (Francia), Iliada Elia (Cipro), Piergiuseppe Ellerani, Martha Isabel Fandiño Pinilla, Giovanni Ferraro, Federica Ferretti, Massimo Ferri, Athanasios Gagatsis (Cipro), Gianfranco Gambarelli, Giangiacomo Gerla, Fredy Enrique González (Venezuela), Jhon Holguin Alvarez (Perù), Maura Iori, Victor Larios Osorio (México), Alice Lemmo, Olga Lucía León (Colombia), Salvador Llinares (Spagna), Daniela Lucangeli, Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Carmelo Mammana, Alain Marchive (Francia), Maria Alessandra Mariotti, Maurizio Matteuzzi, Ivo Mattozzi, Paraskevi Michael-Chrysanthou (Cipro), Deissy Milena Narvaez Ortiz (Colombia), Paolo Negrini, Piergiorgio Odifreddi, Claudia Lisete Oliveira Groenwald (Brasile), Marco Panza, Domingo Paola, Carlo Alberto Parmeggiani, Emilio Pasquini, Erkki Pehkonen (Finlandia), Tito Pellegrino, Tiziano Pera, Luis Radford (Canada), Henry Alexander Ramirez Bernal (Colombia), Tobia Ravà, Pedro Javier Rojas Garzón (Colombia), Pier Giuseppe Rossi, Carla Ida Salviati, Bernard Sarrazy (Francia), Silvia Sbaragli, Luz Marina Sierra (Colombia), Sandra Soler Castillo (Colombia), Aldo Spizzichino, Publio Suárez Sotomonte (Colombia), Carlo Toffalori, Luigi Tomasi, Roberto Tortora, Pierluigi Vannozzi, Carlos Eduardo Vasco (Colombia), Sergio Vastarella, Rodolfo Vergel (Colombia), Paola Vighi, Fernando Zalamea (Colombia), Rosetta Zan.

Programma

Ore 9:00 – 9:15, saluti delle autorità
Ore 9:15 – 11:00, brevi interventi di:
Raymond Duval - Fernando Zalamea - Erkki Pehkonen - Carlos E. Vasco - Paola Vighi - Consolato Pellegrino - Benedetto Di Paola
Ore 11:15 – 11:30, saluti del Gruppo RSDDM dell'Università di Bologna
Ore 11:30 – 13:15, brevi interventi di:
Vittorio Capecchi - Pierluigi Contucci - Massimo Ferri - Piergiuseppe Ellerani - Giangiacomo Gerla - Gianfranco Gambarelli - Luigi Borzacchini
Ore 14:30 – 16:00, brevi interventi di:
Maria Luisa Altieri Biagi - Maurizio Matteuzzi - Ivo Mattozzi - Emilio Pasquini - Massimo Baldacci - Pier Giuseppe Rossi
Ore 16:30 – 17:30, brevi interventi di:
Tobia Ravà - Carlo Alberto Parmeggiani - Anna Cerasoli - Bruno D'Amore.



Link agli Atti del Convegno (liberamente accessibili)

Links to the Conference Proceedings (free download):

http://www.incontriconlamatematica.org/ita/70anni.phpc

http://www.incontriconlamatematica.net/portale/biblioteca

http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/convegni/convegni.htm

Direzione del Convegno: Miglena Asenova, Giorgio Bolondi, Maura Iori, Silvia Sbaragli

Il convegno è aperto a tutti, gratuito e senza la necessità di preiscrizione.

Programma del Convegno nazionale *Incontri con la matematica* n. 30, Castel San Pietro Terme (Bo), 04-06 novembre 2016.

ALMA MATER STUDIORUM
UNIVERSITÀ DI BOLOGNA

NRD, Bologna

Convegno Nazionale n. 30
Incontri con la Matematica

La matematica e la sua didattica.
Convegno del trentennale.

Castel San Pietro Terme (Bologna)
4-5-6 novembre 2016

È stato richiesto l'Alto Patronato del Presidente della Repubblica, già concesso negli anni precedenti e il patrocinio di:
CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche); Università degli Studi di Napoli Federico II; Università degli Studi La Sapienza di Roma; Regione Emilia Romagna; Ufficio Scolastico Regionale per l'Emilia Romagna; Città Metropolitana di Bologna; Ufficio Scolastico Provinciale; Dipartimento di Matematica; Università di Bologna.

Direzione: Bruno D'Amore, Martha I. Fandiño Pinilla e Silvia Sbaragli

Organizzazione dell'evento: Associazione *Incontri con la matematica* con la collaborazione di Formath.

Con il patrocinio del Comune di Castel San Pietro Terme

CITTÀ DI CASTEL S. PIETRO TERME

Conferenze

Venerdì 4 novembre, Centro Congressi Artemide

Tutti gli ordini scolastici

14:30-15:00: **Inaugurazione** alla presenza delle Autorità del mondo politico e accademico; saluti di: **Fausto Tinti** (Sindaco di Castel San Pietro Terme); **Fabrizio Dondi** (Assessore di Castel San Pietro Terme); **Mirko Degli Esposti** (prorettore vicario dell'Università di Bologna); **Giovanni Dore** (Direttore del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna); **Paolo Negrini** (corresponsabile scientifico del NRD di Bologna, Dipartimento di Matematica, Università di Bologna); **Emilia Passaponti** (riviste La Vita Scolastica e Scuola dell'Infanzia).

15:00-15:45: **Ciro Ciliberto** (Presidente dell'UMI, Unione Matematica Italiana): La Matematica tra astrazione e concretezza, tra intuizione e rigore.

15:45-16:30: **Piergiorgio Odifreddi** (ex Università di Torino): Il museo dei numeri.

16:30-17:00: Intervallo

17:00-17:45: **Ferdinando Arzarello** (Presidente dell'ICMI, International Commission on Mathematical Instruction): Tra sensate esperienze e necessarie dimostrazioni: quale senso matematico alle pratiche in classe?

17:45-18:30: **Claire Margolinas** (Università Blaise Pascal di Clermont-Ferrand, Francia): Attualità della teoria delle situazioni.

18:30-19:15: **Bruno D'Amore** (Universidad Distrital Bogotà, Colombia; NRD Bologna) e **Martha Isabel Fandiño Pinilla** (NRD Bologna): Leggere la matematica.

Sabato 5 novembre, Centro Congressi Artemide

Scuola Primaria e Secondaria

14:30-15:15: **Sergio Vastarella** (NRD, Bologna): Dalla classe capovolta all'apprendimento capovolto: la matematica in video e la sfida del modello Flipped Mastery.

15:15-16:00: **Maura Iori** (NRD, Bologna): Conflitti semiotici e semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica.

16:00-16:30: Intervallo [Durante l'intervallo: Geomagia: i magneti per fare geometria in modo stupefacente. A cura di CampuStore e Polydron].

16:30-17:15: **Giorgio Bolondi** (Università di Bologna): La mappa delle competenze di matematica: uno strumento fondante per la costruzione efficace degli apprendimenti, tra didattica e tecnologia.

17:15-18:00: **Silvia Sbaragli** (DFA- SUPSI di Locarno, Svizzera; NRD Bologna): L'importanza dei saperi fondanti. Il caso della geometria.
18:00-18:45: **Giancarlo Navarra** (Università di Modena e Reggio Emilia): La dualità rappresentare-risolvere in early algebra: strategie per favorire in alunni giovani il controllo del processo risolutivo di problemi.

Sabato 5 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme

Scuola dell'Infanzia

14:30-15:15: **Claire Margolinas** (Università Blaise Pascal di Clermont-Ferrand, Francia): Il carattere ordinale del numero: un aspetto da valorizzare.
15:15-16:00: **Anna Aiolfi** e **Monica Bellin** (IC Spinea 1): Dalla lista della spesa allo scontrino: esperienze di economia in continuità con la primaria.
16:00-16:30: Intervallo
16:30-17:15: **Benedetto Di Paola** (Università di Palermo) e **Mariangela Ruisi** (IC "Leonardo Sciascia", Misterbianco, CT): I bambini si raccontano: soddisfazioni, paure e aspettative della loro scuola.
17:15-18:00: **Anna Angeli** (RSDDM, Bologna): Le attività di routine come occasione di argomentazione.
18:00-18:45: **Pietro Di Martino** (Università di Pisa): L'importanza dell'avvio all'argomentazione nella scuola dell'infanzia.

Venerdì 4 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Arte e Matematica: ore 20:45.
Aldo Spizzichino (CNR di Bologna): *Ars Geometrica: dal pensare per immagini a immagini per pensare*.

Musica e Matematica: ore 21:30.
Giuseppe Di Domenico (Fondazione Istituto Tecnico Superiore per le Tecnologie dell'informazione e della comunicazione di Torino) e **Sergio Cè** (Musicando, Pianezza; Agamus, Grugliasco): *Matematica da ascoltare*.

Sabato 5 novembre, Salone delle Terme (Albergo delle Terme)

Teatro e Matematica: ore 20:45.
La Compagnia teatrale **L'Aquila Signorina** presenta: *Dante e la matematica*.
Regia e interpretazione di **Gabriele Argazzi** e **Barbara Bonora**. Riduzione teatrale tratta dal libro: Bruno D'Amore, *Dante e la Matematica*, Firenze: Giunti, 2011.

Seminari sabato 5 novembre

Sabato 5 novembre, Anusca

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

08:30-09:15: **Maria Grazia Bolli** e **Patrizia Fornari** (IC "Gallicano nel Lazio", RM): Una goccia di matematica ogni mattina.

09:15-10:00: **Nicoletta Landi** (IC Pietrasanta 1, LU): L'anagrafe di Quartolandia: un percorso tra giochi combinatori e giochi di strategie.

10:00-10:30: Intervallo

10:30-11:15: **Linda Giannini** (IC "Don Milani" di Latina): La mia esperienza con Cubetto: introdurre la matematica nella scuola d'infanzia attraverso coding e manipolazione.

11:15-12:00: **Bruno D'Amore** (Universidad Distrital Bogotà, Colombia; NRD Bologna) e **Benedetto Di Paola** (Università di Palermo): Dialogo sulla matematica nella scuola dell'infanzia.

Sabato 5 novembre, Centro Congressi Artemide

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I Grado

08:30-09:15: **Maria Elena Cazzetta** (RSDDM, Bologna): Passo dopo passo, impariamo a programmare.

09:15-10:00: **Anna Cerasoli** (scrittrice, L'Aquila): Matematica: croce e delizia.

10:00-10:45: **Aaron Gaio** (Università degli Studi di Palermo): Informatica "unplugged". Un percorso didattico tra matematica discreta e algebra computazionale.

10:45-11:15: Intervallo

11:15-12:00: **Pietro Di Martino** (Università di Pisa) e **Anna Baccaglini-Frank** (Sapienza, Università di Roma): Dalle ricerche in didattica della matematica alla pratica in classe: le diverse interpretazioni delle produzioni degli studenti come strumento per l'insegnante.

12:00-12:45: **Bruno Iannamorelli** (Università dell'Aquila): Strumenti di calcolo aritmetico ingenui e multiculturali.

Sabato 5 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme

Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado

08:30-09:15: **Anna Alfieri** (LS "L. Siciliani", Catanzaro): Le oscillazioni del cuore. Un approccio ai modelli matematici attraverso il digital storytelling.

09:15-10:00: **Maria Giovanna Frassia** e **Annarosa Serpe** (Università della Calabria): Arte e Matematica si incontrano in classe …

10:00-10:45: **Veronica Cavicchi** (Liceo "Veronica Gambara", Brescia): Tracce Open per il Garda.

10:45-11:15: Intervallo

11:15-12:00: **Giuseppina Anatriello** (Università "Federico II", Napoli), **Roberto Capone**, **Francesco Tortoriello** e **Giovanni Vincenzi** (Università di Salerno): Confini Illimitati: il Teorema di Eulero e la rappresentazione decimale periodica.

12:00-12:45: **Marcela García Borbón** e **Jessenia Chavarria Vásquez** (Universidad Nacional, Costa Rica): La matematica in aula: valorizzare la formazione dell'insegnante sull'uso della didattica

Seminari domenica 6 novembre

Domenica 6 novembre, Anusca

Seminari per la Scuola dell'Infanzia

08:30-09:15: **Chiara Franconi** e **Carla Fugardo** (SI "Perasso" e "Scribanti", Genova): Il mio Mostrotto, da zero a otto. Giochi con i numeri e le quantità alla scuola dell'infanzia.

09:15-10:00: **Lietta Santinelli** (Centro Ergoterapia Pediatrica CEP, Bellinzona) **e Silvia Sbaragli** (DFA- SUPSI di Locarno, Svizzera; NRD Bologna): Matematica in azione con bambini in difficoltà.

10:00-10:30: Intervallo

10:30-11:15: **Anna Aiolfi** (IC Spinea 1, VE): Parliamo di forma: condividiamo esperienze e significati per avviare una prima idea di forma geometrica.

11:15-12:00: **Valeria Razzini** (SP "Giordani", Piacenza): Una matematica da favola: come la narrazione può aggirare i principali ostacoli della matematica.

Domenica 6 novembre, Centro Congressi Artemide

Seminari per la Scuola Primaria e Secondaria di I grado

08:30-09:15: **Francesca Martignone** (Università del Piemonte Orientale): Cosa ci possono dire e come possiamo usare le prove Invalsi di matematica?

09:15-10:00: **Manuela Giordani** (IC "Lepido", Reggio Emilia), **Michela Maschietto** (Università di Modena e Reggio Emilia) e **Concetta Saracino** (IC "Lepido", Reggio Emilia): Il duo d'artefatti, pascalina Zero+1 ed e-pascalina, nella costruzione di significati matematici nella scuola primaria.

10:00-10:45: **Nicla Palladino** (Università di Palermo) e **Nicolina Pastena** (Università di Salerno): La storia della matematica per l'inclusione interculturale.

10:45-11:15: Intervallo

11:15-12:00: **Elisabetta Robotti** (Università della Valle d'Aosta), **Antonella Censi** (SP di Quart-Villair, Aosta), **Laura Peraillon** (SP di Fénis, Aosta) e **Ida Segor** (SP Monte Emilius 3, Aosta): Frazioni sul filo: strumenti e strategie per la scuola primaria elaborati nella scuola valdostana.
12:00-12:45: **Barbara Riccardi** (SP "N Palli", Parma): Cantando Contando e Danzando.

Domenica 6 novembre, Salone delle Terme, Albergo delle Terme
Seminari per la Scuola Secondaria di I e II grado
08:30-09:15: **Susanna Abbati**, **Paola Carante**, **Alberto Cena**, **Arianna Coviello**, **Santina Fratti**, **Luigia Genoni**, **Germana Trinchero** e **Fiorenza Turiano** (Gruppo Merlo, Università di Torino): Significati matematici e valutazione formativa.
09:15-10:00: **Gianfranco Arrigo** (NRD, Bologna): Problemi per tutti.
10:00-10:45: **Paola Magnaghi Delfino** e **Tullia Norando** (Politecnico di Milano): Progetti di ricerca interdisciplinare del Laboratorio FDS.
10:45-11:15: Intervallo
11:15-12:00: **Simone Quartara** (Liceo "Maria Ausiliatrice", Genova): Prime esperienze di uso "argomentativo" delle prove INVALSI in classe.
12:00-12:45: **Silver Cappello** (Libera Università di Bolzano): Disaffezione scolastica. La relazione affettiva tra studenti e matematica nella scuola primaria e secondaria.

Poster venerdì 4, sabato 5 e domenica 6 novembre

Le sale dei Poster sono visitabili: venerdì 4 dalle 17:00 alle 19:30; sabato 5 dalle 11:00 alle 14:30 e dalle 17:00 alle 19:30; domenica 6 dalle 10:00 alle 12:30.

Per tutti i livelli scolastici (sala verde, Hotel delle Terme)
Ornella Sebellin e **Rosellina Bausani** (Laboratori didattico-scientifici "Franco Conti" di Pisa): Costruiamo la geometria: riflessioni su modelli matematici nel piano e nello spazio.
Federica Ferretti (NRD, Bologna): "Età della Terra". Un nuovo effetto di contratto didattico.
Cristiana Brilla, Luciana Corinti e **Donatella Di Girolamo** (IC "Carlo Alberto Dalla Chiesa", Roma): Dal cerchio a pi greco per scoprire che la matematica è un gioco divertente.

Per la scuola primaria (sala verde, Hotel delle Terme)
Luciana Attolini (IC San Giorgio di Piano, BO) e **Carlotta Marzocchi** (IC

Malalbergo-Baricella, Altedo, BO): Retematica-M@net, percorsi tra matematica, ICT e CLIL.
Emilia Cipolla (IC Pescara 2, PE): Il sorriso di Felicità.
Angelica Bignami (IC 8 Bologna): Maestra, ma che problema è?
Alessandra Buzzi, Silvia Brillo e **Anna Maria Fringuelli** (IC Perugia 7): Diamo i numeri?
Antonella Casarini, Virginia De Luca e **Giuseppina Martone** (IC "G. Marconi" di Castelfranco Emilia, MO): Anche se sono un po' storti … sono tutti triangoli!
Caterina Fontanazza (IC "Giovanni XXIII" Mogliano, MC): Solidi: figure in 3D!
Marina Giacobbe (SP "C. Tommasetti" di Verbania), **Lorella Maurizi** (RSDDM, Bologna) e **Rosarita Zisa** (SP "M. Peron", Verbania): Calcolo ragionato e calcolo in colonna a confronto.
Gianna Meloni (SP "Castion", IC Belluno 3): Matematica dappertutto … Insieme si può.
Gabriella Mambrin e **Simona Patania** (DD "D. Alighieri" Mirandola, MO): Un bambino di nome Euclide.
Valeria Razzini (SP "Giordani" di Piacenza): Il metodo della "NarrAzione didattica": come la narrazione può aggirare i principali ostacoli della matematica.
Cristina Sperlari (IC di Uggiate Trevano, CO): "Da grande voglio fare … il matematico!". La storia della matematica tra racconti, personaggi, giochi e laboratori.
Antonella Tomasi, Michele Rosa e **Luisa Canavesio** (SP Raffaello Sanzio, I. C. Trento 5): ***The challenge within the challenge. L'insegnamento della matematica in CLIL nella sperimentazione "classe bilingue".***
Gigi Verri (IC "Grumello Del Monte", Telgate, BG): Invalsi per confondere. "Scusa maestro, ma mi sono confuso nel confondermi".

<u>Per la scuola secondaria di I grado (sala Giardino, Hotel delle Terme)</u>
Sara Belloni (IC di Fiorenzuola d'Arda, PC): Mettiamo in luce il bello della matematica.
Diana Cipressi (SM "G. Mezzanotte", Chieti): Girotondo di stelle.
Gioia Giannotti (Istituto professionale "Sismondi- Pacinotti" di Pescia, PT): Le avventure di Pitagorino.

<u>Per la scuola secondaria di II grado (sala Giardino, Hotel delle Terme)</u>
Stefano Barbieri e **Francesca Scorcioni** (IC "G. Marconi" di Castelfranco Emilia) e **Marco Turrini** (LS "A. Tassoni", Modena & Associazione Macchine Matematiche): Simmetrie in verticale.
Giulia Giovanna Bini (LS "Leonardo da Vinci" di Milano): All you need is log: matematica, modelli & multimedialità.

Christian Bonfanti (LS "R. Steiner" di Milano): Derivate, integrali e successioni numeriche.
Roberto Capone, Francesco Saverio Tortoriello e **Giovanni Vincenzi** (Università di Salerno): Il Liceo Matematico: dalle competenze alla competenza.
Carlo Maturo (MIUR): Non uguaglianze bensì disuguaglianze.
Elisabetta Morini (LS "Aldo Moro" di Reggio Emilia): Verifiche in forma di test? Sì, grazie! Ma come?

Laboratori sabato 5 e domenica 6 novembre

Laboratori Giunti Scuola – Scuola Primaria

Sabato 5 novembre, Anusca, sala 1
ore 9:00, 10:00, 11:00 e 12:00 (durata di ogni laboratorio: 45 minuti).
Daniele Costamagna (Unidida): La matematica con Cliccolo.
Giunti Academy: Le competenze in matematica.
Giunti Scuola: Come progettare e valutare un'unità di apprendimento di matematica sulla piattaforma Infomentor.
CampuStore-Giunti Scuola: Blue-Bot, le apette robotiche per scoprire la matematica attraverso il pensiero computazionale.

Domenica 6 novembre, Anusca, sala 1
ore 8:30, 9:30, 10:30 e 11:30 (durata di ogni laboratorio: 45 minuti).
CampuStore-Giunti Scuola: Blue-Bot, le apette robotiche per scoprire la matematica attraverso il pensiero computazionale.
Daniele Costamagna (Unidida): La matematica con Cliccolo.
Giunti Academy: Le competenze in matematica.
Alessandro Bogliolo: Coding in your classroom, now!

Laboratori De Agostini Scuola – Scuola Primaria

Sabato 5 novembre, Anusca sala 3
ore 09:00, 10:00, 11:00 e 12:00 (durata 45 minuti).
Andrea Ferraresso (founder CoderDojo Fossò-Venezia): Coding e matematica in classe con Scratch.
Anche se saranno disponibili alcune postazioni pc, è preferibile che i partecipanti portino il proprio portatile.

Laboratori De Agostini Scuola– Scuola Primaria e Scuola Secondaria di I grado

Sabato 5 novembre, Hotel delle Terme, sala gialla
ore 09:00 (primaria), 10:00 (I grado), 11:00 (primaria), 12:00 (I grado) (durata 45 minuti).
De Agostini Scuola – Formath: Giochi matematici per motivare la classe.

Laboratori Erickson – Scuola Primaria

Sabato 5 novembre, Anusca, sala 6
ore 09:00, 10:00, 11:00 e 12:00 (durata 45 minuti).
Ilaria Cervellin (Insegnante di sostegno specializzata di Scuola Primaria, Vicenza) e **Lorena Finato** (Insegnante di Scuola Secondaria di primo grado, Vicenza): Giochi per l'apprendimento della matematica.

Domenica 6 novembre, Anusca, sala 6 – Tutti i livelli scolastici
ore 08:30, 9:30, 10:30 e 11:30 (durata 45 minuti).
Leonardo Tortorelli (Liceo "Francesco Da Collo di Conegliano", TV): Geometriko: dal laboratorio in aula al torneo nazionale. Ospite **Angelo Guerraggio**, (Direttore del Centro Pristem - Università Bocconi).

Laboratori Pearson – Scuola Secondaria di II grado

Sabato 5 novembre, Anusca, sala 2
ore 9:00 e 11:00 (durata 45 minuti).
Luciano Margara (Università di Bologna): L'informatica nasce dalla matematica e spesso torna a farle visita.
ore 10:00 e 12:00 (durata 45 minuti).
Michela Gnaldi (Università di Perugia): Le strategie di problem solving degli studenti. Alcune prime analisi basate sulla piattaforma Math Result.

Laboratori Media Direct e CampuStore – Scuola Primaria

Sabato 5 novembre, Anusca, sala 4
ore 09:00, 10:00, 11:00 e 12:00 (durata 45 minuti).
9:00 e 11:00: **CampuStore e Fiorella Operto** (Scuola di Robotica) – LEGO Education WeDo 2.0: L'utilità della robotica educativa per l'insegnamento della matematica nella scuola primaria.
10:00 e 12:00: **CampuStore e Polydron**: Geometria e consapevolezza spaziale attraverso la manipolazione.

Domenica 6 novembre, Anusca, sala 4
ore 08:30, 9:30, 10:30 e 11:30 (durata 45 minuti).
8.30: **CampuStore**: Storytelling digitale e manipolativo con i mattoncini LEGO Education: un approccio didattico per ambienti creativi aperti al digitale.
9.30: **CampuStore**: A lezione di matematica con i mattoncini LEGO Education.
10.30 e 11.30: **CampuStore e Polydron**: Geometria e consapevolezza spaziale attraverso la manipolazione.

Laboratori Reinventore con materiali semplici – Scuola primaria e Secondaria di I grado

Sabato 5 novembre, Hotel delle Terme, sala azzurra
ore 09:00, 10:00, 11:00 e 12:00 (durata 45 minuti).
Beniamino Danese (Reinventore): 9:00 "Chimica" (secondaria); 10:00 "La pila di Volta" (per tutti); 11:00 "La digestione" (per tutti); 12:00 "Acqua e pressione" (primaria).

Domenica 6 novembre, Hotel delle Terme, sala azzurra
ore 08:30, 9:30, 10:30 e 11:30 (durata 45 minuti).
Beniamino Danese (Reinventore): 8:30 "Chimica" (secondaria); 9:30 "La pila di Volta" (per tutti); 10:30 "La digestione" (per tutti); 11:30 "Acqua e pressione" (primaria).

Laboratori - Scuola Primaria

Domenica 6 novembre, Anusca, sala 2
ore 08:30 e 10:30 (durata 45 minuti).
Silvia Niero e Monica Canessa (IC Mirano 2°, Mirano, VE): Arte e geometria a teatro.

Laboratori - Scuola Secondaria di II grado

Domenica 6 novembre, Anusca, sala 2
ore 09:30 e 11:30 (durata 45 minuti).
Giuseppe Fiorentino (Accademia Navale di Livorno): Quali strumenti per una didattica digitale della matematica realmente sostenibile.

È riconosciuto **l'esonero dal servizio** per la partecipazione al **Convegno** (per insegnanti di ogni ordine e grado, per il personale direttivo ed ispettivo) ai sensi dell'art. 62 del CCNL/2003 in quanto l'Università, ai sensi dell'art. 1 della Direttiva Ministeriale n. 90 del 1 dicembre 2003, è Ente riconosciuto dal MIUR per la formazione dei docenti.

Verrà rilasciato un attestato per n° 20 ore di **Aggiornamento**, in base alla CM 376, prot. 15218, del 23 12 1995 e successive modifiche. In caso di frequenza parziale al Convegno, verrà comunque rilasciato un attestato per il numero di ore di presenza effettive.

Per avere ulteriori **informazioni di tipo logistico**, ci si può rivolgere a:
Ufficio Cultura - Comune di Castel San Pietro Terme (BO)
P.zza XX Settembre, 4 - Castel San Pietro Terme (BO) - 40024
dal lunedì al venerdì: ore 9.00 - 13.00 (giovedì anche 15.00 - 17.45)
Tel. 051.6954127 /.150 - FAX 051.6954179 - cultura@cspietro.it

Per avere maggiori informazioni tecniche e scientifiche sul Convegno, si

consiglia di fare riferimento ai siti sotto elencati:
http://www.cspietro.it
http://www.dm.unibo.it/rsddm
http://www.incontriconlamatematica.org
http://www.incontriconlamatematica.net

Il Convegno è **aperto a tutti.**

L'iscrizione è accettata solo on line.

Ci si può iscrivere dal 25 maggio 2016 e fino a esaurimento dei posti; il limite fissato è di 900 convegnisti.
La quota di iscrizione è legata alla data di iscrizione:
dal 25 maggio al 31 luglio: 85 euro
dal 1° agosto al 30 settembre: 90 euro
dal 1° ottobre in poi: 95 euro.
Per iscriversi occorre scegliere la modalità di pagamento che si intende usare:

- con carta di credito (consegna della fattura immediata)
- con Paypal (consegna della fattura immediata)
- con bonifico bancario: bisogna seguire le istruzioni per il bonifico e inviare la ricevuta di versamento a info@incontriconlamatematica.net (non appena l'accredito dell'importo sarà verificato, verrà confermata l'iscrizione e inviata la fattura via e-mail).

In caso di difficoltà, rivolgersi a info@incontriconlamatematica.net.

Per accedere alla sala del convegno bisogna presentarsi con un documento di identità; verrà riscontrata l'iscrizione, rilasciato un pass e una borsa (contenente materiali vari) offerta da Giunti Scuola.
L'accesso al convegno inizia venerdì 4 novembre alle ore 13.
La **Segreteria** ha sede nella sala d'ingresso del centro congressi Artemide, viale delle Terme 1010B; è aperta nei seguenti orari:

- venerdì 4 novembre: dalle 13 alle 19:30
- sabato 5 novembre: dalle 07:45 alle 19:30
- domenica 6 novembre: dalle 07:45 alle 12:45

Gli **Atti**, pubblicati da Pitagora Ed. Bologna, saranno posti in vendita nello spazio di Pitagora Editrice fin dal giorno della inaugurazione.

Per tutta la durata del Convegno saranno attivi **servizi di trasporto gratuito** in orari prestabiliti tra la sede della segreteria e le stazioni dei bus e ferroviaria di Castel San Pietro.

I Convegnisti dovranno provvedere per conto proprio alla **prenotazione alberghiera**. Poiché si prevede un afflusso notevole, si consiglia di provvedere al più presto. La segreteria declina ogni responsabilità per mancato alloggiamento.

INFORMAZIONI TURISTICHE

UIT (Ufficio Informazioni turistiche) - Ufficio Turismo e Cultura - Piazza XX Settembre n. 4 - tel.051.6954.127 – 112 – 214; fax: 051.6954.179; orari di apertura dal lunedì al venerdì dalle ore 9:00 alle ore 13:00 e il giovedì anche dalle ore 15:00 alle 17:45; e-mail: uit@cspietro.it - ufficioturismo@cspietro.it - www.cspietro.it - www.comune.castelsanpietroterme.bo.it.
Pro Loco, Via Ugo Bassi, 19 - 40024 Castel San Pietro Terme (BO), tel. 051.6954135 - Fax 051.6951379, info@prolococastelsanpietroterme.it.

Arte e Matematica
Venerdì 04 11 2016, Salone delle Terme, Hotel delle Terme, ore 20:45.
Aldo Spizzichino (CNR di Bologna): *Ars Geometrica: dal pensare per immagini a immagini per pensare*.

Musica e Matematica
Venerdì 04 11 2016, Salone delle Terme, Hotel delle Terme, ore 21:30.
Giuseppe Di Domenico (Fondazione Istituto Tecnico Superiore per le Tecnologie dell'informazione e della comunicazione di Torino) e **Sergio Cè** (Musicando, Pianezza; Agamus, Grugliasco): *Matematica da ascoltare*.

Teatro e Matematica
Sabato 05 11 2016, Salone delle Terme, Hotel delle Terme, ore 20:45.
La Compagnia teatrale **L'Aquila Signorina** presenta: *Dante e la matematica*.
Regia e interpretazione di **Gabriele Argazzi** e **Barbara Bonora**. Riduzione teatrale tratta dal libro: Bruno D'Amore, *Dante e la Matematica*, Firenze: Giunti, 2011.
DANTE E LA MATEMATICA è una divertita riduzione teatrale di alcuni capitoli del libro omonimo di Bruno D'Amore che Barbara Bonora e Gabriele Argazzi, attori e registi impegnati ormai da anni nella rappresentazione teatrale della scienza, hanno preparato per far incontrare agli studenti delle scuole superiori le conoscenze logiche, geometriche e aritmetiche di Dante Alighieri. Mantenendo l'impostazione del testo originario, vengono messi in scena da "L'Aquila Signorina: Teatro e Scienza" quattro incontri tra un Dante scanzonato e curioso, interpretato senza posticci orpelli danteschi da Gabriele Argazzi e diversi altri personaggi cui è Barbara Bonora a dare vita e parola. In tutti i casi - che si tratti di un maestro di logica della tedesca terra di Alemania, di un romanesco funzionario dell'amministrazione vaticana, dello stesso figlio di Dante, Jacopo o dell'attraente erede dei da Polenta, Lauretta - la drammaturgia cerca di mettere giocosamente in evidenza la sorprendente capacità del Poeta di trasformare la conoscenza in poesia.

Mostra di arte e matematica

Aldo Spizzichino: *L'Arti-Giano Bifronte. Tra Scienza ed Arte per gettare un ponte*.
Inaugurazione giovedì 3 novembre ore 18:00, presso Galleria comunale di Arte contemporanea, via Giacomo Matteotti 79, Castel San Pietro Terme.
Catalogo in galleria. Presentazione di Claudio Cerritelli.
Orario di apertura: dal martedì al sabato: 17:00-19:30; domenica: 10:30-12:30 e 17:00-19:30.

RECENSIONI E SCHEDE BIBLIOGRAFICHE

a cura di B. D'Amore

Schede bibliografiche

a cura di B. D.

Acheson D. (2009). *1089 e altri numeri magici. Un viaggio sorprendente nella matematica*. Bologna: Zanichelli. [La prima edizione originale USA in lingua inglese di questo libro è del 2002].

Nella collana *Chiavi di lettura* che la Zanichelli dedica a "piccoli libri autorevoli" soprattutto di tema scientifico, è la volta di questo agile, simpatico, prezioso spaccato creativo e razionale nel mondo della matematica ricreativa. Vi si trovano formule eleganti e belle, una ministoria di π, il numero e, i grandi errori, la musica, le catastrofi, astronomia ed ellisse, e così via. Il tutto è scritto con disinvoltura, senza prosopopea, però con attenzione alle matematiche cose, cioè con sufficiente rigore e puntualità, ricco di notizie storiche su personaggi, fatti, dati e cronologie. La sua lettura richiede solo una conoscenza di matematica di base, diciamo da fine scuola secondaria superiore, non di più, perché i passi eventualmente successivi sono guidati dall'Autore, con cura meticolosa dedicata proprio alla spiegazione. Credo si tratti di una lettura doverosa da parte dell'insegnante alla caccia di idee per attrarre i propri studenti; di una lettura auspicabile da parte di quegli studenti che, amando la matematica, vogliono conoscerne aspetti che non sempre è possibile svolgere nelle ore scolastiche; di una lettura possibile da parte di quegli studenti per i quali la matematica non è di facile ed immediata digeribilità, ai quali potrebbe essere utile un punto di vista informale.

Bottazzini U. (2015). *Numeri*. Bologna: il Mulino.

Questo è davvero un bel libro adatto a tutti, da leggere con gusto e interesse, approfittando delle curiosità stimolanti che contiene, degli infiniti riferimenti storici, delle ghiotte narrazioni. Piacevoli i riferimenti a questioni evolutive, a problematiche storiche, a leggende o narrazioni, più o meno note, sempre arricchite da immagini o suggerimenti precisi. L'Autore riesce, in meno di 200 pagine, a dare una visione ampia dell'aritmetica e sui numeri in generale, di vasta cultura, restando il più possibile sul generale (anche per non spaventare l'eventuale lettore non specialista) ma compiendo ogni tanto degli a-fondo ammirevoli su alcune questioni che lo meritano.
Si passa dalla percezione spontanea della quantità alla formazione dell'idea di numero negli animali e nell'uomo, alla preistoria dell'aritmetica, alla sua nascita composta e consapevole; e si procede con gli esempi della prima civiltà greca fino all'Ellade. Si narra delle difficoltà che ebbe l'aritmetica indiano-araba a penetrare in Europa e la straordinaria avventura della creazione di sistemi numerici sofisticati, come gli immaginari, i complessi, i

quaternioni, gli ipercomplessi. Impossibile non avventurarsi nel ginepraio dell'infinito, iniziando con i primi matematici di cui si hanno notizie storiche e culminando con l'avventura di Georg Cantor e Richard Dedekind, e dunque affrontando la spinosa questione della creazione dei numeri reali (ai quali l'Autore aggiunge gli irreali e i surreali, non a tutti noti).
Bello l'ultimo capitolo che porta il titolo stesso di uno dei più celebri articoli della storia della matematica (Cosa sono i numeri?); sono poche pagine, una dozzina o poco più, ma dense di fascino epistemologico e storico.
Credo che nessun insegnante di matematica debba farsi scappare l'opportunità di leggere questo libro per usarlo concretamente in aula, per farlo conoscere ai suoi allievi più brillanti. A volte, durante le lunghe ore scolastiche, quasi per forza di cose, la matematica rischia di essere pesante e ripetitiva; interrompere per qualche decina di minuti con uno di questi ghiotti esempi, con la lettura di un paragrafo, credo possa giovare al rapporto non sempre felice fra i nostri giovani liceali (o universitari) e la matematica.

Luigi Borzacchini (2005). *Il computer di Platone. Alle origini del pensiero logico e matematico*. Prefazione di Piergiorgio Odifreddi. Bari: Dedalo.

Luigi Borzacchini (2010). *Il computer di Ockham. Genesi e struttura della rivoluzione scientifica*. Bari: Dedalo.

Luigi Borzacchini (2015). *Il computer di Kant. Struttura della matematica e della logica moderne*. Prefazione di Gabriele Lolli. Bari: Dedalo.

Ricordo ancora quando lessi il primo volume di questa trilogia, ricordo che me lo consigliò il collega e amico che ne aveva scritto la prefazione. Senza conoscere l'autore, gli scrissi una lettera, la nostra prima lettera. Diceva, sostanzialmente: "Caro Collega, ti odio". Questo forte sentimento ambivalente era dovuto in prima istanza al fatto che per leggere le 500 pagine del libro ci avevo messo un anno, impegnandomi a fondo e ovviamente lasciando indietro cose urgenti; ma soprattutto al fatto che gli studi, le riflessioni, le analisi dell'autore mi avevano costretto a dolorosi ripensamenti. Mi resi conto che anch'io ero caduto in quella che potremmo chiamare la "trappola del paradigma sintattico", sulla base del quale ciascuno di noi assegna al linguaggio l'idea di rappresentare la realtà, usando poi le derivazioni sintattiche per interpretare deduzioni logiche e non fenomeniche e riportarle (a volte acriticamente) alla realtà. Sembra così ovvio e sembra così naturale tutto ciò, anche grazie al trionfo del computer nella nostra attualità, che quasi non ci si interroga più su come fosse prima che nascessero i formalismi algebrici e le logiche almeno formali se non matematiche. Eppure è possibile, grazie a Borzacchini, ripercorre la storia del pensiero logico per rendersi conto che questo nostro punto d'arrivo è un traguardo cognitivo, non innato, che le

nostre sorgenti culturali ne erano prive. Su ogni pagina nella quale trovavo spunti interessanti, scrivevo note a volte lunghissime; e ora la mia copia ha i margini delle singole pagine, che una volta erano bianchi, completamente grigi, perché prendevo (e prendo) appunti rigorosamente a matita. Alcuni ripensamenti critici sono stati duri da accettare, in un certo qual senso dolorosi, ma necessari, di fronte all'incalzare stringente, dotto e logico dell'autore. Gli scrissi ancora, confermando una versione positiva di quell'odio, ma facendogli i complimenti per questo possente studio. E lui mi annunciò che già stava lavorando al seguito…
Uscì, di fatto, tale seguito, cinque anni dopo, passando dall'Antichità al Medioevo e al Rinascimento, l'epoca nella quale si realizzò quella rivoluzione scientifica che ancora oggi anima e informa le nostre moderne visioni di scienza. Da Parmenide, Zenone, Pitagora, Platone, i Sofisti, Aristotele, Eudosso, Archimede, Diofanto, Cina, si passa ad Anselmo, la Scolastica, Abelardo, Arabi, Fibonacci, Giordano Nemorario… agli eroi dei Rinascimento. Non una "fastidiosa parentesi" fra il mondo antico e quello moderno, come a volte sembrano volere affermare fra le righe certi autori, ma il periodo della nascita di un mondo nuovo, che getta le basi di questa "scienza dei segni" che oggi domina le visioni epistemologiche. Capire Ockham, dopo aver capito Platone, è un altro passo verso, dice l'autore, "capire davvero come funziona un computer", il trionfo della "rappresentazione sintattica". E, anche in questo caso, molte delle visioni contemporanee su quel che significò per tutti noi moderni l'epoca Medioevo-Rinascimento va rivisitata e reinterpretata, facendo piazza pulita di sensi comuni e di idee consolidate. Con che coraggio Borzacchini propone reinterpretazioni stringenti e appassionanti. In queste nuove 650 pagine avvince e distrugge, con citazioni e informazioni perfette, stringenti, convincenti. Questa volta decisi di stendere le note su un quaderno a parte e di mettere uno sticker colorato che sporgesse dal corpo del libro, sul bordo superiore di ogni pagina che contenesse un brano sul quale avessi scritto note e riflessioni personali; il risultato è che ci sono ora centinaia di bordi gialli di foglietti autoadesivi che gonfiano il libro a dismisura. Mi piacerebbe farvi vedere la foto.
Fu a questo punto, 2010, che seppi del III volume, anche perché lo sforzo editoriale della coraggiosa Dedalo era notevole e mi misi, da una parte ad aspettarlo, quasi con ansia, e da una parte a caldeggiarlo presso la casa editrice…
E uscì, è uscito da poco, da pochi mesi, il III tomo, altre 600 pagine. Ancora esattamente 5 anni dopo. Questa volta la lettura è per me più agevole, vuoi perché conosco meglio gli autori da Leibniz (che ho tanto studiato in passato) in poi, vuoi perché la parte strettamente matematica prende il sopravvento: Newton, Lagrange, Dedekind, Cantor, Frege… Vuoi perché ho dedicato anni allo studio di Kant, e questa volta mi ci ritrovo in pieno. Lettura rapida? Aspetta, aspetta… "Rapida" è aggettivo poco adatto, pur sempre di mesi si

tratta. Vi sono capitoli che mettono in evidenza un'analisi così sottile che vanno letti e riletti, come quello sull'infinito (Capitolo 9), tema che ciascuno di noi scopre di sapere a modo suo, tanto che quando lo leggi scritto da un altro, a volte sei sorpreso. I numeri reali, la logica moderna, il trionfo specifico del paradigma sintattico di Frege (altro mio grande amore del passato), il ruolo di Bolzano e di Gauss… C'è una frase dell'autore che mi ha conquistato, messa addirittura in copertina: "Dietro l'odore di eterno che aleggia tra i numeri c'è un'antropologia, la più radicale delle antropologie, che vive di mutamenti cognitivi inauditi, nascosti sotto l'apparente immutabilità delle sue leggi". Vedete, potenziali lettori? Vedete che forza? Come non odiarlo pensando: "Questa frase l'avrei potuto/voluto scrivere io, la penso esattamente così. Ma perché l'hai scritta tu?". Come può un matematico che si occupa di apprendimento restare impassibile di fronte a quel che scrive il prefatore, citando l'autore? "Borzacchini ci avverte che la storia della scienza non è veramente comprensibile se la si racconta come scandita dalle grandi idee, perché al di sotto delle idee agiscono i processi cognitivi che tali idee motivano e trasformano".

Il mio sogno è che ogni persona che abbia a cuore la matematica, la sua storia, il suo pensiero, i suoi processi cognitivi decida di leggere con estrema attenzione e dedizione questi tre volumi, ringraziando l'autore per averli scritti e Claudia, l'editore, per averli accettati e stampati. Credo che ciascuno di noi, che diciamo di amare o di credere nella matematica e nel pensiero scientifico che essa veicola, debba nella vita trovare il tempo, il modo, la costanza di studiare con profondità questa opera. Di modo che, quando saremo costretti dalle barbarie a buttare al rogo tutti i libri del mondo e a salvarne solo alcuni, questi siano un candidato prepotente.

Toffalori C. (2015). *Algoritmi*. Bologna: il Mulino.

Che Carlo Toffalori sia persona colta, arguta e simpatica si sapeva già, basta vedere la sua produzione precedente. Ma in questo libro, ricco e sottile, costruito con cura in modo armonico e avvincente, supera sé stesso. Fin dall'esordio (Bolle di sapone) ci conquista con un sarcasmo e un'ironia sottili, e poi così prosegue anche se, talvolta, affronta argomenti assai spinosi e complessi, anche se lo fa con un linguaggio avvincente. Fin dai primi passi, riesce a catturare il lettore con esempi stimolanti che sembrano sempre alla portata di tutti e che invece spesso nascondono contenuti sottili e tutt'altro che banali. Nella famosa soluzione (assurda: –4) del celebre problema delle noci da dividere e della scimmia, riesce a dare un tocco di magia narrativa, per esempio. E poi, pian piano, sistematizza tutto l'argomento, ma sempre senza eccedere in formalismi eccessivi, anche perché la collana (Raccontare la matematica) è destinata al grande pubblico.

Mi sono divertito moltissimo con la metafora di Merlino e Artù, attraverso la

quale è riuscito a svelare più d'una sottile verità, ricorrendo al racconto brillante e creando una situazione falsamente verosimile. Mille esempi, mille citazioni, mille riferimenti, proposti e regalati con eleganza e ironia, ma una ironia sottile che conquista il lettore. L'ultimo capitolo, il IV, è un vero gioiello per i contenuti molto attraenti e per la maestria con la quale essi sono proposti. Conoscendo un po' la tematica di tutto il libro e in particolare alcuni degli argomenti in maniera più specifica, mi sono molto divertito a vedere le strategie ricche di perizia con le quali li affronta.
Io credo che questo libro possa essere letto con profitto da tutti gli insegnanti di matematica, per il proprio diletto personale e per arricchire la propria cultura, fondamentale per la professione. Ma lettori possibili sono anche bravi studenti di secondaria e di università. Gli insegnanti, poi, potrebbero sfruttare molte delle stimolazioni narrative e giocose qui proposte, per proporle a mo' di contenuti matematici nella loro attività didattica. Alcuni famosi giochi sono qui proposti in maniera accattivante e, secondo me, direttamente proponibili in aula, come le Torri di Hanoi, l'Hex e molti altri. Mostrare a dei giovani studenti che, all'origine o nella risoluzione di giochi appassionanti la matematica fa la differenza, è certo una provocazione culturale e una sollecitazione cognitiva di alto livello.

Guy Brousseau, Nadine Brousseau, Virginia Warfield (2014). *Teaching Fractions throught Situations: A Fundamental Experiment*. Dordreght and other: Springer.

Chiedo scusa ai lettori; questo libro formidabile è uscito oltre un anno fa, ma consegno questo mio testo solo ora. La lettura è stata in un certo senso agevole e anche abbastanza rapida, soprattutto perché molte di queste esperienze didattiche mi erano familiari, assai note nella loro sostanza e in molti particolari da decine d'anni; ma la presentazione critica che ne viene qui fatta è allo stesso molto storicizzata e attuale e mi ha costretto ad alcune letture complementari. Alcune riguardano testi del passato, perfino degli anni '70, altre sono più moderne perché gli Autori, oltre che raccontare imprese del passato e fare il punto su quelle teorie che, di fatto, hanno dato il via a quella scienza che oggi chiamiamo in tutto il mondo *Didattica della Matematica*, hanno voluto inserire in bibliografia anche testi assai più recenti, alcuni dei quali non avevo esaminato a fondo fino ad oggi.
Per me è stata la piacevole riscoperta di "esperimenti fondamentali" (come li hanno sempre chiamati i coniugi Brousseau fin dagli esordi), ma anche di una loro revisione critica, molto importante e attuale.
Dunque, il libro. Il libro parla di frazioni, ma soprattutto parla di teoria delle situazioni, ma parla anche di che cosa significa creare un esperimento fondamentale, all'interno della teoria delle situazioni, sul tema delle frazioni. Creare cioè delle situazioni empiriche concrete interessanti che spingano lo

studente a ricostruire da sé la teoria, non ad ascoltarla – farla propria come fosse un oggetto esterno a sé – saperla ripetere. Sappiamo tutti che la base della teoria delle situazioni consta di due momenti iniziali fondamentali: la *devoluzione* (da parte dell'insegnante) e l'*implicazione* (da parte dello studente). Lo studente sa che sta accettando di attuare, implicandosi nella situazione proposta dall'insegnante, per imparare qualcosa, ma non sa che cosa; sta all'insegnante creare situazioni opportune, non solo attraenti, ma efficaci, affinché lo studente impari quel che l'insegnante ha in mente, un particolare oggetto matematico.
Ricordo qui che Guy Brousseau pubblicò con Dunod nell'ottobre del 1964, come sua prima esperienza editoriale, un libro di matematica senza parole, solo suggerimenti di lavoro per i bambini di prima primaria; e che da lì partirono poi tutte le sue famosissime esperienze che ufficialmente datano 1975 e oltre, ma la cui sistemazione teorica ha basi precedenti. Le idee teoriche di Guy e Nadine Brousseau divennero concreta azione didattica negli anni '70 e '80 grazie alle esperienze francesi del COREM e degli IREM che furono considerate esempi da seguire da tutti gli studiosi delle problematiche di insegnamento-apprendimento del mondo intero.
Questo libro è un esempio, e che esempio!, di come una situazione speciale, opportuna, ben studiata a tavolino possa costituire l'ossatura concreta di un apprendimento che sia significativo, creativo, razionale, duraturo, L'esperienza è descritta con mille dettagli in 15 moduli, per un totale di oltre 40 lezioni efficaci, 120 pagine. Poi si passa alle osservazioni legate alla realizzazione effettuata dai maestri, i veri artefici dell'*Avventura*, con tutte le note da essi proposte all'esperienza, poco meno di 40 pagine. Per poi passare all'esperienza messa a disposizione dei ricercatori, con una descrizione storica di estremo interesse dei preludi della *Didattica della Matematica*, dalla "Matematica Moderna" degli anni '50–'60 a oggi, altre 35 pagine di estremo interesse.
Si tratta di una vera ghiottoneria per l'insegnante che ha avuto esperienza della difficoltà che si incontra a far costruire ai propri allievi l'idea di "frazione" nella scuola primaria o secondaria; e per i ricercatori che hanno la possibilità di poter far uso, in un testo concentrato e unico, di migliaia di informazioni storiche sull'evoluzione della prima teoria scientifica che abbia costituito la *Didattica della Matematica*, cioè la teoria delle situazioni.
Oggi, che di teorie ne esistono tante, a maggior ragione ha senso cercare una radice comune a tutte; non per servirsene in maniera univoca, ma per concepire il fatto che tutte queste teorie costituiscono un *unicum*, una sola scienza.

Poincaré J. H. (2016). *Ultimi pensieri*. A cura di Vincenzo Barone. Bari: Dedalo.

Dedalo, la preziosa e sempre attenta casa editrice di Bari, ci regala questa opera che non potrà passare inosservata; essa contiene, a cura di Vincenzo Barone, nove testi di Poincaré e quattro appendici, molti dei quali non erano mai stati tradotti in italiano. In essi, l'indiscutibile genio polimorfo di Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) si mostra in tutte le sue sfaccettature, passando dalla matematica, alla fisica, alla morale. Alcuni di questi testi sono conferenze, come *L'evoluzione delle leggi* che fu tenuta a Bologna nel 1911, *Lo spazio e il tempo*, Londra 1912, *L'ipotesi dei quanti*, sempre Londra 1912, *I rapporti fra la materia e l'etere*, Parigi 1912 eccetera. Altre sono testi di articoli apparsi su varie riviste, ma mai raccolti tutti insieme, in un unico tomo.
I lavori di fisica sono preziosi; è ben noto che Poincaré accettò solo tardivamente la teoria dei quanti ma, quando lo fece, vi diede contributi assai significativi. I lavori di matematica sono straordinari; io in particolare adoro *Perché lo spazio ha tre dimensioni* e invito tutti a leggerlo. Poincaré, nella sua curiosità intellettuale senza fine, non disdegna considerazioni di carattere storico (*Cournot e i fondamenti del calcolo infinitesimale*, per esempio) o di carattere epistemologico (*I fondamenti della geometria*, altro saggio geniale) o infine di carattere divulgativo (*Il diavoletto di Arrhenius*).
I suoi testi sono profondi, dotti, scientificamente insuperabili, ma in più occasioni dimostra un'ironia pungente e trascinante come quando, in *La logica dell'infinito*, fa le pulci a un famoso articolo di Bertrand Russell sull'assioma di riducibilità.
Straordinario dal punto di vista filosofico il saggio *La matematica e la logica*, nel quale dà una descrizione profonda e semplice allo stesso tempo delle varie teorie di epistemologia della matematica a lui contemporanee, almeno per quanto concerne l'infinito matematico.
Fuori dal contesto scientifico accademico, segnalo *L'unione morale*, il testo di una conferenza che Poincaré tenne ai membri della *Lega francese per l'educazione morale* tre settimane prima della morte; qui propone vedute assai moderne, piene di fascino.
Un libro, insomma, che ancora una volta testimonia la grandezza di uno dei personaggi chiave della cultura umana di tutti i tempi.

Borzacchini L. (2016). *La scienza di Francesco. Dal santo di Assisi al papa argentino*. Bari: Dedalo.

Soprattutto la tormentata vicenda di Galileo, il duro controllo esercitato dalla Chiesa cattolica nel Rinascimento sull'indagine scientifica in nome di un aristotelismo inteso in modo discutibile e varie altre vicende successive, come il rogo delle streghe e storie simili, hanno indotto per secoli a considerare insanabile un divario che appare evidente fra la Chiesa cattolica stessa e la

scienza; l’opposizione fra una teoria creazionista e una teoria evoluzionista, la proposta del Big Bang, ha decretato come insanabile quel dissidio. Ma poi, diverse encicliche hanno cercato di risanare questa interpretazione e addirittura seminari e convegni di studio, in un recente passato, hanno mostrato come, a partire dal Medioevo, addirittura i francescani, potessero pensarsi come antesignani della scienza moderna. Basti ricordare il convegno di Assisi del 2006: *I Francescani e la scienza*.
Fra tutte le encicliche citabili possibili, ricordo l’ultima, cui fa riferimento l’Autore, quella *Laudato si’* di papa Francesco, al secolo Jorge Mario Bergoglio, primo papa gesuita e primo papa americano, perito chimico come formazione di studi *(Il Sole 24 Ore, 13 marzo 2013)*; l’enciclica fu promulgata nel giugno del 2015 ed è ben noto che inizia con una citazione del *Cantico delle Creature* o *Cantico di Frate Sole*, un eccezionale splendido componimento poetico di Francesco d’Assisi, forse del 1224, un inno alla vita e una proposta di fede nella Natura. Per molti, una poesia a soggetto scientifico che di certo richiama alcuni brani del *Libro dei Proverbi*, uno dei quali non a caso citato da Enzo Fortunato, l’autore della prefazione a questo libro: *Il Signore ha fondato la terra con sapienza, ha consolidato i cieli con intelligenza*. Con sapienza e intelligenza, dunque, con razionalità.
Tutto questo lungo preambolo per cercare di descrivere, in poche righe, questa nuova opera dell’amico e collega Luigi Borzacchini, devoto di Francesco e docente (volevo scrivere: *ma* docente) di *Storia e fondamenti della matematica* e di *Logica matematica*, presso l’università di Bari.
Ho avuto la fortuna di leggere questo libro in bozze, ma già ne avevo intuito tratti nel precedente libro di Luigi, *Il computer di Kant*, nel quale alcuni di questi temi facevano capolino. E devo dire di esserne rimasto impressionato. Anch’io mi sarei messo nella categoria non ben definita di coloro che pensano più a un dissidio fra scienza e religione, anche se ho mille ragioni storiche per non assumere una posizione drastica. Per esempio, mi aiuta in ciò il lungo elenco di francescani (mi limito a questi, visto che Francesco è il nome più citato in tutto il libro) che nella storia hanno dato contributi alla scienza. Per quel che ne so, il gigante Ruggero Bacone (studioso di ottica, ma anche di molto altro), Giovanni Peckham (il fenomeno della luce, astronomia e matematica), Riccardo di Mediavilla (precursore della scienza moderna, secondo il famoso fisico Pierre Duhem), il geniale Guglielmo di Ockham, Giovanni di Casale (precursore della fisica matematica), Giovanni di Ripatransone (seguace di Duns Scoto), Francesco da Appignano (astronomia), Pietro Gallego (scienze naturali), l’enciclopedista Bartolomeo Anglico, solo per ricordare i primi che mi vengono in mente; ma i più significativi appaiono nel libro in oggetto, trattati con enorme dovizia di particolari.
Molte delle opere scientifiche nate in seno alla comunità francescana sono di carattere chimico (diremmo oggi) e medico, studi con lo scopo di ridurre le infermità dei popolani poveri o almeno di lenire i loro effetti; in questo settore

va ricordato ancora Ruggero Bacone insieme a Bonaventura da Iseo e Giovanni da Rupescissa.
Dunque, il discorso non è nuovo, eppure suscita in molti incredulità e sorpresa, dato che, come dice l'Autore, davvero c'è chi s'immagina la comunità francescana delle origini come una sorta di comunità hippy di stampo socialista; e, certo, certa filmografia e certa letteratura hanno aiutato a costruire questa immagine.
Questo libro, che sostiene una tesi teologica forte, sulla quale però non interverrò, è un dotto e profondo libro storico, scientifico di prim'ordine. Il suo percorso è storico e critico all'un tempo, parte dell'analisi della scienza di Aristotele per come è davvero, e non per come viene normalmente proposta in certi libri di storia di basso livello, per poi delineare il concetto di scienza nel Cristianesimo delle prime vicende e nell'Alto Medioevo. Questo è un momento interessante per la storia; dal latino diffusamente parlato, si passa all'accettazione delle lingue locali, già praticate, sì, ma come sottolingue, dialetti.
Si passa poi allo studio storico e scientifico del Basso Medioevo, dei contributi scientifici e dei contrasti con la Chiesa che si stava espandendo. È in questo ambito che nasce la congregazione dei francescani, molti dei quali teologi, filosofi e comunque persone di alta cultura, docenti universitari sparsi per l'Europa. Ed è in quest'ambito che Aristotele viene reinterpretato, nel tentativo di fondere l'architettura metafisica con il pensiero cristiano. Ricordiamo che è in questo periodo che si dibatte il violento ma necessario tema logico-metafisico della dicotomia universale-individuo che ha dato alla filosofia e ai filosofi tanto da discutere ed è stato anche oggetto di violenze non solo verbali. C'è poi il problema della causalità, che viene affrontato in maniera esplicita e che ancora oggi è motivo di dissidi logici e metafisici.
Si arriva così al secolo XIV, uno dei più agitati e interessanti della storia umana, purtroppo in passato oscurato dai romantici innamorati solo del Rinascimento, un secolo luminosissimo, altro che buio. La logica e la fisica si allontanano sempre più, l'individuo diventa soggetto dell'epistemologia, il linguaggio e la logica vivono a mio avviso alterne vicende, da un ripudio feroce a un avvicinamento significativo; si consolidano gli studi (già apparsi nel secolo precedente) sul linguaggio mentale. Si afferma la versione estensionale che avrà la sua fortuna totale solo alla fine del XIX secolo in logica, tanto da uniformare e dominare il linguaggio della logica e della matematica nella prima metà del secolo XX. Si afferma la necessità di uno studio specifico del linguaggio della filosofia, che l'uso dei termini non implica un'esistenza come quella reale delle cose.
E poi, ecco il nucleo del libro, il Medioevo apre alla scienza, ma non solo alla scienza generalmente intesa, anche alla scienza modernamente intesa, in tutti i suoi aspetti: spazio, tempo, movimento, logica, algebra, …
Siamo a tre quarti del libro, quando appare il mondo moderno, nel quale

scienza e cristianesimo si confrontano, a fasi alterne. E qui l'Autore ci sorprende, per esempio con un'analisi francescana della legge di gravitazione universale… Ma c'è di più, molto di più, e il lettore avido e curioso potrà solo leggere il libro per saperlo. C'è perfino la famosa posizione tomista di Benedetto XVI (al secolo Joseph Aloisius Ratzinger) sull'accettazione della teoria dell'evoluzione, distinguendo un'origine orizzontale naturalistica da un'origine verticale ontologica.
E finalmente si arriva a un capitolo specifico dedicato al Concilio Vaticano II (1962–1965) che ha dato uno scossone alla chiesa cattolica, ben noto a tutti, anche nel campo delle relazioni con il mondo della scienza. Qui trova posto anche il controverso tema del relativismo il cui tema centrale è quello del linguaggio.
Il capitolo finale è dedicato alla già ricordata enciclica di Francesco.
E parliamo ora della resurrezione di Cristo. Naturalmente tutti sappiamo delle diverse interpretazioni date a questa resurrezione, da quella vera e propria, fisica, più diffusa fra i cristiani, a quella di un corpo spiritualizzato non fisico del teologo svizzero Hans Küng; dal fatto concreto al fatto escatologico proposto dal teologo italiano Vito Mancuso; dalla risurrezione reale a una resurrezione che va interpretata in chiave puramente simbolica, proposta dal teologo gesuita statunitense Robert Haight; e varie altre. C'è poi il forte dibattito se la resurrezione sia un fatto storico accertato o no. Insomma la questione è complessa assai.
Ma torniamo al libro. Intellettualmente profonda la conclusione: "Conclusioni del Contastorie" e in particolare la spiegazione (finalmente!) di quel che fece Gesù Cristo il sabato, essendo spirato il venerdì e resuscitato la domenica. Perché aspettare il terzo giorno, dunque, perché non resuscitare subito? Sì, tutti sanno che Cristo è sceso agli Inferi, ma a far che? No, lettore avido, non ti rivelerò nulla, dovrai leggerlo da solo.

Bergmann J., Sams A. (2012). *Flip your classroom. Reach every student in every class every day*. Washington, DC: ISTE; Alexandria, VA: ASCD. Edizione in lingua italiana: 2016. *Flip your classroom. La didattica capovolta*. A cura di Sergio Vastarella. Firenze: Giunti Scuola.

Se ne parlava da tanto, erano arrivati spezzoni di informazione dagli USA e da altri Paesi, a volte contradditori. E finalmente siamo di fronte a un'edizione completa italiana di questo famoso libro che si occupa di metodologia didattica, non di didattica della chimica, come qualcuno diceva, ma di didattica reale in aula, nelle scuole, di non importa quale materia. E a presentare al pubblico italiano un'opera egregia, chiara, ben documentata e commentata è Sergio Vastarella, maestro di scuola primaria, laureato in Scienze della Formazione, dottorando presso l'Università di Bolzano, di certo

il più esperto in questa tecnica didattica, almeno in tutta Italia, visto che ha collaborato personalmente con Bergmann e Sams, che ha già sperimentato non solo in Italia questa metodologia, che l'ha studiata a lungo, ideando anche una sua applicazione nella scuola primaria, cosa che neppure i due creatori avevano mai pensato.
Di che cosa si tratta, lo sanno tutti: scambiare tra loro le fasi più tipiche della lezione cosiddetta frontale; gli insegnanti registrano o usano registrazioni che trattano un certo tema T di una certa disciplina; invece che dare spiegazioni frontali agli studenti, affidano loro il compito di vedere e rivedere questa registrazione a casa, senza spiegazioni o trattazioni precedenti, usando quando vogliono il tasto di pausa e di replay, prendendo appunti su quel che capiscono e preparando domande su quel che non capiscono o non capiscono appieno. Il giorno dopo, il ruolo del docente cambia radicalmente; lui non spiega oralmente T, ma risponde alle domande degli studenti su T. Dirige il lavoro in aula, guadagna tanto tempo da dedicare a esercitazioni (che si fanno in aula, discutendone i passaggi con i compagni, piuttosto che a casa da soli) o a laboratori, a discussioni eccetera. Questa è la base, indiscutibilmente affascinante; ma c'è molto di più. Con il passare del tempo, gli Autori e chi li ha seguiti hanno ampliato notevolmente il modello; ora gli studenti cercano a volte da sé stessi i filmati, leggono perfino pagine di libri, usano tutti gli strumenti efficaci che la moderna tecnologia mette a loro disposizione, discutono talvolta a casa con i genitori i contenuti di T, insomma tutto cambia radicalmente.
Ci sarebbe molto di più da dire, perbacco, ma questa è solo una recensione, breve, che deve attrarre tanto il lettore da indurlo a procurarsi il libro e leggerselo per conto proprio.
Io sono citato più volte nel testo, per cui ora mi diverto a fare osservazioni personali.
Non esiste UNA metodologia unica, vincente e sicura nel campo dell'insegnamento-apprendimento; ma questo lo sanno anche gli Autori e il Curatore, e lo dicono più volte; certo, però, si tratta di una bella novità, che rende davvero protagonista l'allievo che impara e non la disciplina imparata; il suo successo sembra decisamente maggiore, rispetto al classico "io ti spiego – tu ascolti – possibilmente impari – a casa ti eserciti – io correggo le tue esercitazioni", che sappiamo non funzionare più da tanto tempo.
Tanto è vero che il geniale creatore della moderna didattica della matematica, Guy Brousseau, aveva messo in crisi questa metodologia farraginosa fin dagli anni '70, proponendo, all'interno della teoria delle situazioni, le situazioni adidattiche che sembrano proprio essere la base concettuale di questa metodologia; tanto è vero che, alle pagine 122–124, nella sua Postfazione, Vastarella "ruba" pagine di un libro di D'Amore e Sbaragli, cercando di spiegare in poche parole le fasi di una situazione adidattica.
Nella loro intelligente invenzione, Bergmann e Sams riscoprono parte della

teoria delle situazioni; per esempio, a pagina 11 riscoprono la teoria degli ostacoli all'apprendimento, alle pagine 11–12 riscoprono il contratto didattico, a pag 11 il fenomeno della scolarizzazione e così via; se avessero studiato la didattica della matematica avrebbero avuto una terminologia più efficace e scientifica di quella un po' ingenua che usano; ma NON c'è motivo al mondo per cui due docenti di chimica si mettano a studiare la didattica della matematica; ed è dunque bellissimo che ne riscoprano elementi per conto proprio. E poi ricordiamo che negli USA questa teoria non ha mai avuto studiosi entusiasti, i ricercatori in didattica USA hanno in mente tutt'altro. Si pensi che l'opera fondamentale di Brousseau degli anni '70–'80 è stata tradotta solo nel 2014.

Certo, la struttura delle classi USA è assai diversa dalle nostre; da noi non ci sono gli esami finali nel loro senso; in aula possono esserci fino a 150 studenti; il fenomeno negativo delle assenze da noi non è rilevante, ma negli USA sì; la differenza fra scuole di città e scuole di campagna da noi è ridotto, lì è fortissimo; … Insomma, ha ragione Vastarella quando studia adattamenti di questo metodo intelligente e promettente a situazioni diverse, caso per caso. E lui esperienza ne ha già fatta, in Italia, un bel po'.

Naturalmente, un cambio di metodologia comporta un cambio di valutazione; ma, intelligentemente, i due Autori danno un ampio resoconto concreto di quella da loro appositamente ideata.

Due punti mi piacciono in particolare; la novità del rapporto con i genitori e la novità della distribuzione del tempo in aula, tutto a vantaggio degli studenti.

C'è una frase di Brousseau che qui non viene citata, che io adoro, e che però è soffusa in tutto il libro: per imparare davvero uno studente deve farsi carico personale del proprio apprendimento. E questa sembra essere una molla che non dipende dalla metodologia ma che certo a me sembra maggiormente possibile in questa, che non nella classica frontale.

Una sola parola sugli strumenti tecnologici; ancora pochi giorni fa una docente italiana di scuola primaria asseriva che lei non avrebbe mai e poi mai permesso ai suoi studenti di usare alcuno strumento tecnologico, neppure la macchina calcolatrice. Mi sarei messo a piangere; significa che, in pieno 2016, costei mai ha avuto modo di vedere che meraviglie didattiche si possono proporre usando la calcolatrice; lei identificava questo strumento con l'esecuzione di calcoli; privilegia il calcolo mentale e gli algoritmi scritti rispetto a quelli meccanici, senza sapere le possibilità didattiche di questi ultimi. In questa metodologia, invece, ogni allievo usa e sfrutta al meglio delle sue possibilità ogni strumento tecnologico del quale dispone, il che è una meraviglia: lo strumento entra in aula, viene usato a casa, è uno strumento per apprendere. Finalmente.

Mi piace l'idea che gli studenti siano responsabili della scelta dello strumento, che scelgano che cosa guardare-analizzare-studiare a casa; una bella carica di responsabilità alla quale, ne sono convinto anch'io, lo studente tende a

rispondere in genere con maturità.
Naturalmente, chiudo come ho aperto, nella didattica non esistono panacee, non cadiamo in questa banale trappola. Ma, come ho già detto, gli Autori e il Curatore, ne sono pienamente consapevoli.

Duval, R. & Saenz Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. [Prólogo de Bruno D'Amore. Comentarios a los articolo de Bruno D'Amore y de Carlos Eduardo Vasco Uribe]. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Sia Raymond Duval che Adalira Saenz Ludlow sono stati più volte invitati a tenere seminari presso il DIE, Doctorado Interinstitucional in Educación che ha sede presso la Universidad Distrital Fancisco José de Caldas, a Bogotà, ma che riunisce tre università oltre quella: la Pedagogica Nacional con sede a Bogotà e la Universidad del Valle che ha sede a Cali. I loro seminari sono sempre stati frequentatissimi e di alta qualità. Si è così pensato di chiedere loro tre articoli a testa, da loro stessi scelti, fra quelli di cui sono rispettivamente autori. Noi docenti ci siamo occupati della loro traduzione e revisione; e a due di noi è stato dato l'arduo compito di scrivere presentazioni e commenti di tali 6 articoli; Carlos Eduardo Vasco Uribe ha commentato gli articoli di Adalisa Saenz Ludlow, il sottoscritto quelli di Raymond Duval (ho avuto anche l'incarico di scrivere la prefazione dell'intera raccolta). Il libro è il primo di una serie di opere analoghe a distribuzione gratuita, tanto delle copie cartacee quanto di quelle pdf, destinate ai colleghi ricercatori, ai docenti del dottorato, ai docenti universitari interessati alla didattica della matematica, agli studenti di dottorato, agli studenti di master, agli insegnanti di scuola, insomma a tutti coloro che amano questa disciplina e vogliono approfondirla. A seguire, entro pochi mesi, uscirà il volume numero 2 i cui autori sono Luis Radford e il sottoscritto.
Questo volume, ovviamente, visti i nomi degli Autori, è dedicato alla semiotica, uno dei temi caldi degli ultimi 25 anni nell'ambito della didattica della matematica. I due autori hanno scelto ciascuno tre articoli convergenti sui temi che li hanno resi famosi. Dunque non si tratta di un testo che possa essere considerato come iniziale allo studio della semiotica, ma semmai di riflessione e di approfondimento. Mi piace comunicare che i livelli scolastici che in qualche modo sono oggetto delle analisi didattiche sono i più vari, dalla scuola primaria alla scuola superiore, con dovizia di particolar, di esempi e di discorsi che toccano temi diversi e con idee davvero sorprendenti e specifiche, di grande utilità.

Frenkel E. (2015). ***Amor y matemáticas*****. Bogotà: Ariel-Planeta.**

Ho letto questa versione in lingua spagnola del testo che ha avuto la sua prima edizione in inglese nel 2013 con il titolo: *Love & Math*. Edward Frenkel è un giovane geniale matematico russo che ha ottenuto il dottorato ad Harvard e che insegna ora ad Harvard e presso l'università della California, a Berkeley, noto per i suoi lavori in geometria algebrica, topologia e fisica matematica (ma su questo notevole personaggio si può vedere wikipedia). Questo libro è fantastico, così commentato da un grande scrittore, filosofo ed economista libanese/statunitense, Nassim Nicholas Taleb (autore de *Il cigno negro*, uno dei libri che hanno cambiato il mondo): «Se non sei matematico, questo libro ti farà desiderare di esserlo». In esso si racconta la storia personale dell'autore, una sorta di profonda e dotta autobiografia, ma soprattutto dei suoi interessi in matematica, vista come la quintessenza della conoscenza e del senso della vita; ma vi si raccontano molte storie della matematica, storie vere, problemi aperti, problemi risolti in modi sorprendenti, speranze e sogni matematici. Un tema che conquista e affascina, ricorrente in tutto il libro: che cosa vuol dire lavorare in matematica, perché questa attività può e deve essere paragonata a quella dello scrittore o dell'artista; che cosa è la bellezza intrinseca della matematica, qual è il suo fascino, come si esprime. Libri su questo tema o, almeno, brani che lo trattano, ne ho letti tanti, ma questo è sofisticato, sorprendentemente affascinante. Alcuni presentatori di questo libro parlano di divulgazione della matematica, ed è vero; ma, attenzione: qui non c'è il tentativo di abbassare il livello, qui c'è il sogno di farsi capire, ma con uno sforzo di erudizione da parte del lettore (d'altra parte questo accade in ogni disciplina).

E il titolo? Geniale anche quello, un modo fantastico per attrarre il lettore. La formula dell'amore si trova, in questa edizione, a pagina 341, nel capitolo 8 dal titolo: *Cercando la formula dell'amore*.

Ma… L'idea è la seguente. L'autore vuol girare un film che faccia capire quanto profondo possa essere il molteplice legame fra matematica, sentimenti, vita, cultura, passione… Decide di ispirarsi dal punto di vista cinematografico alla pellicola *Yûkoku* (*Passione*) (in inglese: *The Rite of Love and Death*) il cui testo è una novella del celebre scrittore giapponese Yukio Mishima *Yûkoku* e la cui regia è dello stesso autore, così come il protagonista. È ben noto che Mishima si suicidò nel 1970, a 45 anni, dopo aver pronunciato un famoso discorso patriottico: «Dobbiamo morire per restituire al Giappone il suo vero volto! È bene avere così cara la vita da lasciare morire lo spirito? Che esercito è mai questo che non ha valori più nobili della vita? Ora testimonieremo l'esistenza di un valore superiore all'attaccamento alla vita. Questo valore non è la libertà! Non è la democrazia! È il Giappone! È il Giappone, il Paese della storia e delle tradizioni che amiamo». Terminato il discorso, si suicidò con il rituale dei samurai, il seppuku, insieme al suo caro amico e allievo Masakatsu Morita. Anche la narrazione di Mishima nel romanzo e nel brevissimo film

parla di un suicidio; si tratta della famosa storia (vera) del tenente della Guardia imperiale Takeyama e di sua moglie Reiko; Takeyama riceve dai superiori (e dunque dall'Imperatore) l'ordine di eseguire la condanna a morte di un gruppo di ufficiali giapponesi che avevano ordito un complotto per attentare alla vita dell'Imperatore stesso e di alcuni ufficiali per cercare di fermare la tremenda e devastante guerra contro le forze alleate durante la seconda guerra mondiale, guerra che tanti danni stava causando alla popolazione civile. Da un lato, Takeyama deve obbedire all'ordine del sacro Imperatore, dall'altra non può condannare quei coraggiosi rivoltosi che vogliono solo salvare la popolazione da terribili sofferenze. E così è costretto a scegliere l'unica strada dell'onore, il suicidio con una spada, il seppuku, appunto. Il film è brevissimo, muto, non c'è dialogo, è in bianco e nero, e i sentimenti forti appaiono con violenza, in modo irrefrenabile.
Ebbene, Frenkel decide di girare con questa stessa tecnica il film che narra di un matematico che trova la formula dell'amore, ma che scopre che questa, messa in mani folli, può causare danni tremendi agli esseri umani; e così lui e la sua compagna decidono di offrirla sì alla conoscenza e regalarla all'umanità, ma tatuandola (con l'antica tecnica giapponese dolorosissima dell'incisione con il bambù) sul corpo della donna amata, la quale accetta il sacrificio d'amore con amore. La storia narrata con durezza è dunque quella dell'incisione.
Ho voluto dilungarmi su questo particolare, perché è quello che dà la chiave di volta di tutto il libro, che ci regala un titolo accattivante, che spiega la passione, al limite della follia.
Ma… Ma la posizione filosofica di Frenkel è assolutamente realista, anzi addirittura platonica, cosa che non condivido per nulla. I suoi ragionamenti sono accattivanti e, in certa misura, convincenti. Il suo riferimento a grandi pensatori platonici del passato, fra i quali spicca evidentemente Gödel, è molto elegante e filosoficamente ben fondato. Ma io credo che l'intervento umano nel processo della ideazione-costruzione della matematica sia molto più che una scoperta di qualche cosa che esiste già, io credo che si tratti invece di creazione. Certo, occorre fare dei distinguo, ma non si può pensare a una matematica che non dipenda dalle scelte umane. Non è vero che la scoperta umana della matematica è già strettamente determinata e che se i gruppi non li avesse "scoperti" Galois sarebbero stati scoperti lo stesso da qualcun altro identici a quelli di Galois; è che quella teoria è stata creata così e quella non creata da un essere umano, semplicemente, non la conosciamo, non sappiamo come sia, perché semplicemente non è mai stata creata. Sì, lo so, la cosa è complicata, e non è questo lo spazio idoneo. Ma suggerisco di studiare una proposta pragmatista nella creazione matematica, opposta a quella realista della sua scoperta.

AA. VV. (2015). *Du mot au concept. Figure*. Grenoble: PUG (Presses Universitatire de Grenoble:

In particolare l'articolo: Duval R. (2015). *Figures et visualisation géométrique: "voir" en géométrie*. Alle pagine 147–182.

Una bella idea. Dal 2004 esiste un seminario a cadenza annuale di tipo pluridisciplinare, organizzato dalla *Maison de Sciences de l'Homme* di Grenoble. Si sceglie una parola, si invitano vari noti studiosi e ciascuno declina, interpreta, studia, nel suo ambito di ricerca, quella parola, in tutte le connotazioni culturali possibili. La parola scelta nel 2013 fu "Figura". Gli invitati elaborano scritti, e li presentano alla pubblicazione che avviene sotto forma di libro non appena possibile. Così, *Figura*, vede la sua realizzazione sotto forma di interessantissimo volume solo nel dicembre 2015.
Inutile dire che tutti i contributi sono ricchi e preziosi, sul piano culturale; ma che, per noi matematici e didatti della matematica, riveste un ruolo speciale quello di Raymond Duval, visto che tratta della figura intesa come ente che rende possibile la visualizzazione in geometria, anzi, come dice l'autore, permette di vedere in geometria, un vedere assai specifico, da non confondere con la semantica della stessa parola in altri campi. Com'è suo solito, Raymond è capace di far confluire in questo discorso semiotico l'epistemologia, la geometria vera e propria, il senso della vista, l'idea di percezione, il grande tema della visualizzazione (anche con le sue connotazioni didattiche non sempre positive), il rapporto fra visione ed enunciato che ne descrive le caratteristiche intrinseche eccetera; e sempre in un sottofondo coerente e prezioso, quello dell'apprendimento della geometria da parte dello studente.
Segnalo anche un altro bell'articolo, quello del collega Alain Mercier che si occupa di disegno, schema, figura e della loro interrelazione reciproca nella formazione dei saperi scientifici.
Inutile dire che, trattando di figure, vari di questi articoli hanno a che fare con la matematica, con le illustrazioni dei libri di testi e molti altri temi legati al mondo dell'apprendimento.

La matematica e la sua didattica, Anno 24, n. 1-2, 2016
ISSN 1120-9968